DCC639 - ALC - Prova III

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

23 de Julho de 2024

Nome do aluno:

Instruções:

- Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados.
- Você pode escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

⇒ **Atenção: A sua resposta deve estar contida no espaço delimitado para cada questão, devendo ser autocontida para entendimento da resolução. A folha de rascunho que você recebe não será entregue e não será corrigida.**

Questão 01: Dois algoritmos ALG1 e ALG2 foram usados para transformar a matriz A abaixo indicada em uma matriz similar B. Após $k = 3$ iterações do algoritmo QR, foram coletadas as aproximações de B abaixo indicadas. Um dos dois algoritmos não empregou uma fase de pre-processamento, anterior ao algoritmo QR. Responda às questões propostas, apresentando suas justificativas.

```
A = -2.    0.   4.  -3.    0.
  -15.   4.   2.   8.    1.
  -8.    2.   7.   3.   -3.
  -15.  -1.   2.   10.   1.
  -11.   2.   1.   4.    2.
ALG1
11.535344  -15.814475  -0.0098925   17.542151  -12.039947
   0.2484158   6.8120458   0.7182519   2.3324697   1.2548657
   0.0071437   1.0802719   4.9441015   3.6996861  -1.720255
   0.078128   -0.4117166   1.0261165  -1.6331624   3.8166157
   0.0003491   0.0022462  -0.0009539  -0.0158491  -0.6583285
ALG2
   11.535344  -9.8357265   17.38408   -12.453403   12.196314
   0.2605102   6.6893101  -0.6741826  -0.6960549  -2.2805135
   5.672D-17  -3.6360701  -1.2419462   3.4176443  -3.7334895
  -2.362D-16   1.152D-14   1.0832425   4.6946447   0.3735902
   2.337D-18  -1.143D-16  -3.126D-16  -0.0459834  -0.6773523
```

1. Em que consiste a fase de pré-processamento ?

   Resposta: A fase de pré-processamento consiste em transformar a matriz A em uma Hessenberg superior (isto é uma triangular superior + subdiagonal abaixo da principal), para acelerar a Fase II, de natureza iterativa, o algoritmo QR.

2. Algum algoritmo empregou a fase de pré-processamento ? Em caso positivo, qual ?

   Resposta: Sim, os resultados numéricos indicam que ALG2 empregou a transformação de A em uma Hessenberg H, pois as entradas abaixo da subdiagonal inferior possuem magnitude bastante inferior às demais entradas da matriz coletada após 3 iterações de QR. Com isso, com as mesmas $k = 3$ iterações, ALG2 produziu uma matriz mais próxima de uma triangular superior que ALG1. Isso é o que se espera do efeito da fase de pré-processamento.

3. Para k suficientemente grande, qual a forma da matriz B retornada pelos algoritmos ?
Resposta: A matriz A não é simétrica, portanto o algoritmo QR produzirá uma matriz assintoticamente triangular superior. Caso A fosse simétrica, B seria assintoticamente diagonal.

4. Sabendo que os autovalores da matriz A são -2.135676, -0.7025164, 10.424842, 8.3359461 e 5.0774047, quantos autovetores linearmente independentes A possui ?

   Resposta: Como os autovalores informados são distintos, A é garantidamente não-defectiva (a multiplicidade geométrica e algébrica de cada autovalor é a mesma), portanto a matriz possui $n = 5$ autovetores linearmente independentes. Em resumo, a matriz não defectiva possui autovetores que geram o $\mathbb{R}^n$.

5. Os algoritmos ALG1 e ALG2 também podem apresentar os autovetores de A ?
Resposta: Como a matriz A não é simétrica, a fatoração computada por ALG1 e ALG2 é a faturação de Schur e apenas o autovetor associado a λ_1 será produzido. Ou seja, assintoticamente teremos $QAQ^* = T$, onde T e uma triangular superior. Para o cálculo dos demais autovetores, é necessário esforço computacional adicional, empregando-se outros métodos, à partir dos autovalores já calculados.

Questão 02: Sobre as matrizes reais, responda verdadeiro ou falso, e justifique.

1. Toda matriz quadrada é unitariamente similar a uma matriz diagonal.

   Resposta: Falso. As matrizes unitárias A (aquelas em que se observa $AA^* = A^*A$) são as matrizes unitariamente similares a diagonais. Nem toda matriz A quadrada é ortogonalmente similar a uma diagonal. Um exemplo já mencionado aqui é das matrizes defectivas, uma vez que seus autovetores não fornecem uma base para $\mathbb{R}^n$.

2. A matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, com os autovalores $\lambda_1 = 5 - i$ e $\lambda_2 = 5 + i$ é simétrica.
Resposta: Falso. É propriedade das matrizes reais simétricas admitirem autovalores (e autovetores) reais.

3. Seja A uma matriz $n \times n$, defectiva. Os autovetores de A geram uma base para $\mathbb{R}^n$.

   Resposta: Falso. Matrizes defectivas não são similares a uma diagonal. Portanto, os autovetores linearmente independentes não são suficientes para escrever o espaço.

4. Dada A^+ a pseudoinversa de A, os valores singulares de AA^+A são iguais a $\sigma_1^3, \sigma_2^3, \ldots, \sigma_r^3$, quando o posto de A é igual a r.

   Resposta: Falso. Os valores singulares de AA^+A são os próprios valores singulares de A: $AA^+A = U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T U\Sigma V^T = U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^T = U\Sigma V^T$.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto n. Não é possível subtrair de A uma matriz de posto 1 de forma que a nova matriz, B, satisfaça $posto(B) = posto(A) - 1$.
Resposta: Falso. Considere a fatoração SVD de $A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$. Escolha qualquer $k : 1 \le k \le n$ e faça $B = A - \sigma_k u_k v_k^T$, de forma que $B = \sum_{i=1, i\neq k}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ e veja que B é a soma de $n-1$ matrizes de posto 1, portanto possui posto $n-1$.

Questão 03: A matriz R dada é ortogonalmente equivalente à matriz A, retangular. Responda às questões colocadas justificando. Não é necessário calcular explicitamente as entradas das matrizes pedidas. Basta indicar como são construídas. $R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Na Fase I do algoritmo que computa a fatoração SVD de $A = U\Sigma V^T$, é necessária a aplicação de uma ou mais operações ortogonais na matriz R dada, de forma que seja ortogonalmente equivalente a uma bidiagonal. Quantas transformações ortogonais adicionais são indispensáveis para a conclusão dessa fase e, assim, obter uma matriz Z apropriada, para acelerar a fase subsequente ?

   Resposta: Como a matriz R é triangular superior, as transformações ortogonais que relacionam Z e R são $Z = ERD$, onde $E = I$ não é necessária. Portanto, apenas $n - 2 = 2$ matrizes D_1, D_2 são necessárias, de forma que $D = D_1 D_2$, $D_i^T D_i = I$ para $i = 1, 2$.

2. Qual é a matriz ortogonal empregada na primeira transformação ?

   Resposta: A matriz $D_1 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ possui a forma $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1\times 3} \\ 0_{3\times 1} & F_1 \end{bmatrix}$ e $F_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é o refletor de Householder $F_1 = I_3 - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ para $v = [-1, 0, 2]^T - \sqrt{5}[1, 0, 0]^T$.

3. Qual a forma da matriz Z obtida ?
   Resposta: Como mencionado no enunciado, $Z = RD_1D_2$ é bidiagonal, após a aplicação do pré-processamento.

4. A fatoração SVD de R e Z são idênticas ?
   Resposta: Não, Z e R possuem os mesmos valores singulares, e as fatorações SVD se relacionam da seguinte forma: se $Z = U_Z\Sigma_Z V_Z^T$, $U_R = U_Z$, $\Sigma_R = \Sigma_Z$ e $V_R^T = V_Z^T D^T$.

5. Considere a matriz $H(X) = \begin{bmatrix} 0 & X^* \\ X & 0 \end{bmatrix}$. As matrizes $H(Z)$ e $H(R)$ são similares ? Essas matrizes possuem os mesmos autovetores ? Justifique.

   Resposta: Sim, são similares pois $H(R) = XH(Z)X^{-1}$ onde $X = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ admite inversa $X^{-1} = X^T = \begin{bmatrix} D^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. As duas matrizes $H(Z), H(R)$ possuem os mesmos autovalores $\sigma_i, -\sigma_i$, mas suas fatorações espectrais são distintas, ou seja não possuem os mesmos autovetores. Sejam $\begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix}$ os autovetores de $H(Z)$ associados a $\lambda_i = \sigma_i, \lambda_{i+n} = -\sigma_i$. Os autovetores de $H(R)$ associados a $\sigma_i, -\sigma_i$ são $\begin{bmatrix} Dv_i \\ u_i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} Dv_i \\ -u_i \end{bmatrix}$.

Questão 04: Considere $v \in \mathbb{R}^2$. **Resposta:** Considere a figura:

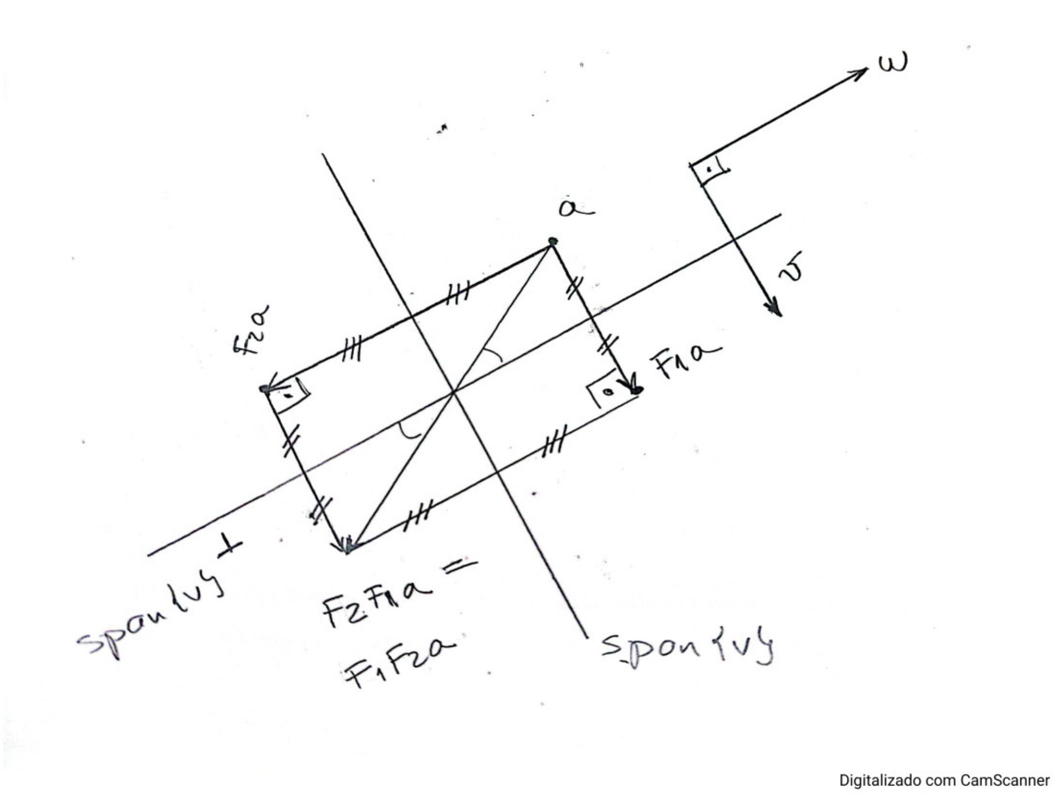

Figura 1: Representação geométrica de F_1F_2a.

1. (35%) Quais os refletores de Householder F_1, F_2 cujos hiperplanos de reflexão são $span\{v\}^\perp$ e $span\{v\}$, respectivamente ?
   Resposta: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\|v\|_2 = 1$. Sendo v o construtor do refletor, a reflexão definida por $F_1 = I - 2vv^T$ se dá sobre $span\{v\}^\perp$. Tomando $w \in$

$span\{v\}^{\perp}$, ou seja $w^T v = 0$ como o construtor para o segundo refletor, também com norma unitária, temos que $F_2 = I - 2ww^T$ é o refletor sobre $span\{v\}$.

2. (35%) Quais são os projetores P_1, P_2 que projetam a em $span\{v\}^{\perp}$ e $span\{v\}$, respectivamente ?
Resposta: $P_2 = vv^T$. $P_1 = I - P_2 = I - vv^T$ (Observação: $I - vv^T = ww^T$).

3. (30%) Dado $a \in \mathbb{R}^2$, qual é o resultado de $F_1 F_2 a$? Justifique.
Resposta: $F_1 F_2 a = -a$. Mostramos este resultado por dois caminhos: algébrico e geométrico.
⇒ Demonstração algébrica: Veja:

$$\begin{aligned}
F_1 F_2 &= (I - 2vv^T)(I - 2ww^T) \\
&= I - 2vv^T - 2ww^T + 4vv^T ww^T \\
&= I - 2vv^T - 2ww^T
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $vv^T + ww^T = I$ para esse caso do $\mathbb{R}^2$. Como qualquer vetor $z \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $z = \alpha v + \beta w$, temos que

$$\begin{aligned}
(vv^T + ww^T)z &= (vv^T + ww^T)(\alpha v + \beta w) \\
&= vv^T(\alpha v) + (ww^T \beta w) \\
&= \alpha v + \beta w \\
&= Iz
\end{aligned}$$

Como z é qualquer, $vv^T + ww^T = I$ e, portanto, $F_1 F_2 a = (I - 2vv^T - 2ww^T)a = -a$.
Observe que esse resultado não é válido para o $\mathbb{R}^n$, pois uma base para $span\{v\}^{\perp}$ não é composta por apenas um vetor w ortogonal a v.
⇒Para a "demonstração geométrica", veja a Figura 1.