

Programação Estocástica: L-Shaped (parte 1)

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

`acunha@dcc.ufmg.br`

2021/2



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS



UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

Relativas à esta apresentação

- ① J. R. Birge & F. Louveaux. Introduction to Stochastic Programming, Springer, 2011, 2a Edição [Seção. 5.1]
- ② R.K.Martin. Large Scale Linear and Integer Programming: a unified approach, Kluwer [Cap. 10].

Características

- Problema estocástico linear em dois estágios.
- Função objetivo e restrições lineares.
- Suporte finito.
- Recurso fixo (não há incerteza na matriz W)

Observações

- 1 Embora a apresentação seja feita para o caso em que as variáveis de primeiro estágio x são contínuas, o mesmo algoritmo pode ser aplicado caso sejam discretas.
- 2 O algoritmo pode ser inserido em um esquema Branch-and-bound para resolver o caso em que as variáveis de segundo estágio são discretas.
- 3 Os cortes apresentados aqui são válidos para o caso em que y é discreta. O ideal, porém, é utilizar cortes específicos que explorem a estrutura inteira das variáveis.

Two stage stochastic linear program with fixed recourse

$$\min c^T x + \sum_{k=1}^K p^k q_k^T y_k$$

$$Ax = b$$

$$T_k x + W y_k = h_k \quad k = 1, \dots, K$$

$$x \geq 0$$

$$y_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K$$

Algoritmo discutido aqui

L-shaped (Decomposição de Benders) versão multi-cut (ou com cortes de Otimalidade desagregados).

- 1 Projetar as variáveis y_k , de segundo estágio, *para fora*.
- 2 Apresentar uma reformulação (de Benders) para o PDE.

A reformulação envolve apenas as variáveis x , as restrições puras de primeiro estágio ($Ax = b, x \geq 0$) e Cortes de Benders ou cortes de Projeção (de otimalidade e de viabilidade, obtidos ao se aplicar projeção).

- 3 Identificação de Cortes de Benders violados (resolução do problema de separação).
- 4 Apresentação do algoritmo de planos de corte de Benders (L-shaped).
- 5 A demonstração de convergência apresentada aqui é baseada em argumentos de projeção.

- Artifício para remover as variáveis y_k da função objetivo.

$$\min c^T x + \sum_{k=1}^K \theta_k$$

$$Ax = b$$

$$Wy_k = h_k - T_k x \quad k = 1, \dots, K \quad (1)$$

$$x \geq 0$$

$$y_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \quad (2)$$

$$\theta_k \geq p^k q_k^T y_k \quad k = 1, \dots, K \quad (3)$$

- θ_k também produzirá uma aproximação para a função $Q_k(x)$.
- Multiplicadores (de Farkas) associados às restrições em que y_k aparece:
 - $\pi_k \in \mathbb{R}^{m_k} : k = 1, \dots, K$ associado a (1)
 - $u_k \in \mathbb{R}_+^{n_k} : k = 1, \dots, K$ associado a (2)
 - $\pi_{0,k} \in \mathbb{R}_+$ associado a (3)
- Na dedução que segue, empregamos $\sum_k$ para designar $\sum_{k=1}^K$.

Para todo $k = 1, \dots, K$:

- 1 Somando o produto de multiplicador por desigualdade:

$$\theta_k \pi_{0,k} + u_k^T y_k + \pi_k^T W y_k \geq \pi_k^T (h_k - T_k x) + \pi_0 p^k q_k^T y_k$$

- 2 Reescrevendo, colocando y_k em evidência:

$$\theta_k \pi_{0,k} - \pi_k^T (h_k - T_k x) \geq (-\pi_k^T W + \pi_0 p^k q_k^T - u_k^T) y_k$$

- 3 Impondo a projeção, isto é, os multiplicadores devem pertencer ao cone de projeção $\hat{\mathcal{C}}_k$ definido por:

$$\pi_{0,k} p^k q_k^T = u_k^T + \pi_k^T W$$

$$u_k \geq 0$$

$$\pi_{0,k} \geq 0$$

- 4 Obtemos os Cortes de Benders (ou cortes de projeção):

$$\theta_k \pi_{0,k} - \pi_k^T (h_k - T_k x) \geq 0 \text{ para todo } k \text{ e } (\pi_{0,k}, \pi_k, u_k)^T \in \hat{\mathcal{C}}_k$$

- Os multiplicadores associados a (3) podem ser suprimidos. Os multiplicadores $\pi_{0,k}, \pi_k$ devem pertencer ao cone $\mathcal{C}_k$, definido como

$$\begin{aligned}\pi_{0,k} p^k q_k^T &\geq \pi_k^T W \\ \pi_{0,k} &\geq 0\end{aligned}$$

- Observe que temos uma desigualdade válida para todo vetor de multiplicadores $(\pi_{0,k}, \pi_k)^T \in \mathcal{C}_k$

$$\theta_k \pi_{0,k} - \pi_k^T (h_k - T_k x) \geq 0$$

- Reformulação de Benders (1a versão, ainda não é a final):

$$\min c^T x + \sum_k \theta_k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\theta_k \pi_{0,k} - \pi_k^T (h_k - T_k x) \geq 0 \quad \forall k, \forall (\pi_{0,k}, \pi_k) \in \mathcal{C}_k \quad (4)$$

- O cone $\mathcal{C}_k$ é poliedral e como tal pode ser descrito apenas por meio de seus geradores (raios extremos).
- Por esta razão, podemos considerar apenas os raios extremos de $\mathcal{C}_k$ para escrever a reformulação de Benders.
- Assumimos que $\mathcal{V}_k$ denota o conjunto de raios extremos de $\mathcal{C}_k$ e $|\mathcal{V}_k| = r(k) + s(k)$.
- Reformulação de Benders:

$$\min c^T x + \sum_k \theta_k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\theta_k \pi_{0,k}^l - (\pi_k^l)^T (h_k - T_k x) \geq 0 \quad \forall k, l = 1, \dots, r(k) + s(k)$$

- Observe que a reformulação acima envolve um número finito de cortes de Benders, embora possivelmente exponencial em $m_k, n_k : k = 1, \dots, K$.

- Assumimos que $r(k)$ dos $s(k) + r(k)$ raios extremos possuem multiplicador $\pi'_{0,k}$ nulo e que os $s(k)$ demais possuem estes multiplicadores não nulos, podendo ser normalizados, i.e., $\pi'_{0,k} = 1$ para todos eles.
- Reformulação de Benders (Benders Master Program - BMP):

$$\min c^T x + \sum_k \theta_k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$-(\pi'_k)^T (h_k - T_k x) \geq 0 \quad \forall k, l = 1, \dots, r(k) \quad (5)$$

$$\theta_k - (\pi'_k)^T (h_k - T_k x) \geq 0 \quad \forall k, l = 1, \dots, s(k) \quad (6)$$

- Os cortes (6) e (5) são denominados cortes de viabilidade e otimalidade, respectivamente.

- 1 Relaxamos todas ou muitas restrições (6) e (5) e resolvemos um BMP relaxado (RBMP).
- 2 Dada uma solução ótima $(\bar{x}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_K)$ para RBMP, resolvemos o problema de separação associado aos cortes de Benders, isto é, identificamos se há cortes (6) e (5) ausentes no RBMP, violados por $(\bar{x}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_K)$.
- 3 Um ou mais cortes de Benders violados, caso existam, são inseridos em um novo RBPM. Retornamos ao passo 1 para reotimizar ou paramos se não forem encontrados cortes violados. Neste caso, $(\bar{x}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_K)$ é a solução ótima do BMP.

Problema de decisão para cada k

Dado $(\bar{x}, \bar{\theta}_k)$, existe $\pi_k : (1, \pi_k) \in \mathcal{C}_k$ para o qual valha

$$\bar{\theta}_k < \pi_k^T (h_k - T_k \bar{x}) ?$$

Ou, existe $\pi_k : (0, \pi_k) \in \mathcal{C}_k$ tal que

$$0 < \pi_k^T (h_k - T_k \bar{x}) ?$$

Em caso positivo, use o multiplicador encontrado para formular um corte de Benders que deve ser inserido em um novo RBMP.

O problema de separação é um PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi_k^T (h_k - T_k \bar{x}) \\ & (1, \pi_k) \in \mathcal{C}_k \end{aligned}$$

Dado $\bar{x}, \bar{\theta}_k$ formulamos PSD(k) e PSP(k).

PSD(k)

$$\begin{aligned} \max \quad & (h_k - T_k \bar{x})^T \pi_k \\ & W^T \pi_k \leq p^k q_k \end{aligned}$$

PSP(k)

$$\begin{aligned} \min \quad & p^k q_k^T y_k \\ & W y_k = h_k - T_k \bar{x} \\ & y_k \geq 0 \end{aligned}$$

Temos três casos a considerar:

C0 PSD(k) é inviável.

Observe que o domínio de PSD(k), $P_k := \{\pi_k : W^T \pi_k \leq p^k q_k\}$, não depende da escolha x . Então se $P_k = \emptyset$ para um $\bar{x}$, o será para qualquer outro x . Assim, o dual de PSD(k), PSP(k), será sempre ou inviável ou ilimitado, não havendo um x que torne PSP(k) finito. Logo, BMP é inviável ou ilimitado.

Assim sendo, assumimos que $P_k \neq \emptyset$ para todo k e que:

- $\{\pi_k^l : l = 1, \dots, s(k)\}$ são os $s(k)$ vértices de P_k
- $\{\pi_k^l : l = 1, \dots, r(k)\}$ são os $r(k)$ raios extremos de P_k .

Observe que como W é constante, os raios extremos de P_k são os mesmos para todo k . Podemos então substituir $r(k)$ por r , na expressão acima.

Os dois casos que restaram:

- C1 PSD(k) assume ótimo finito. Podemos assumir que o ótimo ocorre em um vértice de P_k . Neste caso, seu dual PSP(k) também assume ótimo finito e, por dualidade forte, o valor das duas funções objetivo são coincidentes em um par de solução primal-dual ótimas.
- C2 PSD(k) é ilimitado e, neste caso, PSP(k) é inviável.

- Assumimos que o mínimo de PSP(k) é atingido para $\bar{y}_k$ e que $\bar{\pi}_k$ é o correspondente vetor de variáveis duais ótimas. Por dualidade forte:

$$p^k q_k^T \bar{y}_k = (h_k - T_k \bar{x})^T \bar{\pi}_k$$

- Se PSP(k) é factível e $\bar{\theta}_k < (h_k - T_k \bar{x})^T \bar{\pi}_k$, encontramos uma desigualdade violada por $(\bar{x}, \bar{\theta}_k)$. Use os multiplicadores $\bar{\pi}_k$ para formular

$$\theta_k \geq \bar{\pi}_k^T (h_k - T_k x)$$

que será inserido em um novo RBMP a ser reotimizado.

- Observe que
 - Se PSP(k) é viável para todo k, $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_K)^T$ com custo $c^T \bar{x} + \sum_k p^k q_k^T \bar{y}_k$ é uma solução viável para BMP.
 - $\sum_k \bar{\theta}_k + c^T \bar{x}$ sempre fornece um limite inferior válido para o ótimo do BMP.

- PSP(k) é inviável e como PSD(k) é factível, a inviabilidade de PSP(k) é caracterizada por um raio extremo $\bar{\pi}_k$ tal que

$$\bar{\pi}_k^T (h_k - T_k \bar{x}) > 0$$

- Isto é, a existência de $\bar{\pi}_k$ tal que $W^T \bar{\pi}_k \leq 0$ e $\bar{\pi}_k (h_k - T_k \bar{x}) > 0$ para algum k caracteriza inviabilidade de PSP(k) e ilimitação do PSD(k).
- Use o multiplicador $\bar{\pi}_k$ para formular um corte de viabilidade

$$-\bar{\pi}_k^T (h_k - T_k x) \geq 0$$

que será inserido em um novo RMPB

- Note que $\sum_k \bar{\theta}_k + c^T \bar{x}$ fornece um limite inferior válido para o ótimo do BMP.

- ➊ Inicialize $LB = -\infty$, $UB = \infty$. Relaxe as restrições (6) e (5) e formule o RBMP.
- ➋ Resolva RMPB:
 - ➊ Se RMPB é inviável, BMP é inviável. Neste caso, páre.
 - ➋ Caso contrário, seja $(\bar{x}, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_K)$ uma solução ótima de RBMP. Atualize $LB = \max\{LB, \sum_k \bar{\theta}_k + c^T \bar{x}\}$.
- ➌ Para todo k resolva PSP(k).
 - ➊ Se PSP(k) é viável para todo k , seja $\{(\bar{y}_k, \bar{\pi}_k) : k = 1, \dots, K\}$ um par primal-dual ótimo para PSP(k)/PSD(k). Atualize $UB = \min\{UB, c^T \bar{x} + \sum_k p^k q_k^T \bar{y}_k\}$. Se $\bar{\theta}_k < (h_k - T_k \bar{x})^T \bar{\pi}_k$ para algum k , insira um corte de otimalidade (6) em RMPB e volte ao passo 2.
 - ➋ Se PSP(k) é inviável (PSD(k) é ilimitado) para algum k , seja $\bar{\pi}_k$ o raio extremo que caracterizou sua ilimitação. Insira um corte de viabilidade (5) em RBMP e volte ao passo 2.
- ➍ Se $LB = UB$ páre, BMP foi resolvido à otimalidade.

$$\min \quad 100x_1 + 150x_2 + \mathbb{E}_\xi(\hat{q}_1y_1 + \hat{q}_2y_2)$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 40$$

$$x_2 \geq 20$$

$$6y_1 + 10y_2 \leq 60x_1$$

$$8y_1 + 5y_2 \leq 80x_2$$

$$y_1 \leq d_1$$

$$y_2 \leq d_2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$W = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = T_2 = \begin{bmatrix} -60 & 0 \\ 0 & -80 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dois cenários, $\xi = (d_1, d_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2)^T$, $\xi^1 = (500, 100, -24, -28)^T$,
 $\xi^2 = (300, 300, -28, -32)^T$, $h_1 = [0 \ 0 \ 500 \ 100]^T$,
 $h_2 = [0 \ 0 \ 300 \ 300]^T$, $q_1 = [-24 \ -28]^T$,
 $q_2 = [-28 \ -32]^T$, e probabilidades $p^1 = 0.4, p^2 = 0.6$.

Neste exemplo são empregados cortes de otimalidade agregados e não desagregados como o que deduzimos.

$$\begin{aligned} \min \quad & 100x_1 + 150x_2 + \theta_1 + \theta_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 \geq 40 \\ & x_2 \geq 20 \end{aligned}$$

Solução ótima $\bar{x} = (40, 20)^T$, $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = -\infty$.

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (40, 20)^T, \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = -\infty$.

$$\min \quad w_1 = (0.4)(-24)y_1 + (0.4)(-28)y_2$$

$$s.t. \quad 6y_1 + 10y_2 \leq 2400$$

$$8y_1 + 5y_2 \leq 1600$$

$$y_1 \leq 500$$

$$y_2 \leq 100$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Subproblema finito com

$$\bar{y} = (137.5 \ 100)^T,$$

$$w_1 = -6100(0.4) = -2440,$$

$$\bar{\pi}_1 = (0.4)(0 \ -3 \ 0 \ -13)^T$$

- Formulamos o corte (de otimalidade) $\theta_1 + \bar{\pi}_1^T T_1 x - \bar{\pi}_1^T h_1 \geq 0$:

$$\theta_1 + 96x_2 + 520 \geq 0.$$

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (40, 20)^T, \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = -\infty$.

$$\min \quad w_2 = (0.6)(-28)y_1 + (0.6)(-32)y_2$$

$$s.t. \quad 6y_1 + 10y_2 \leq 2400$$

$$8y_1 + 5y_2 \leq 1600$$

$$y_1 \leq 300$$

$$y_2 \leq 300$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

O subproblema é finito com

$$\bar{y} = (80 \ 192)^T,$$

$$w_2 = -8384(0.6) = -5030.4,$$

$$\bar{\pi}_2 = (0.6)(-2.32 \ -1.76 \ 0 \ 0)^T$$

- Formulamos o corte (de otimalidade) $\theta_2 + \bar{\pi}_2^T T_2 x - \bar{\pi}_2^T h_2 \geq 0$:

$$\theta_2 + 83.52x_1 + 84.48x_2 \geq 0.$$

- Como $\bar{x} \in K_2$, dispomos de uma solução viável para o problema estocástico.
- A solução de primeiro estágio $\bar{x} = (40, 20)^T$ produziu as soluções ótimas de segundo estágio $\bar{y}_1 = (137.5, 100)^T$ e $\bar{y}_2 = (80, 192)^T$ viáveis, nos respectivos cenários.
- Portanto, $c^T \bar{x} + p^1(\hat{q}_1)^T \bar{y}_1 + p^2(\hat{q}_2)^T \bar{y}_2$ permite atualizar o limite superior para o valor de RP

$$RP \leq \min\{\infty, 7000 + 0.4(-6100) + (0.6)(-8384)\} = -410.$$

- A solução do RBMP fornece um limite inferior $(-\infty)$ trivial no momento.

$$\theta + \sum_k \pi_k^T T_k x \geq \sum_k \pi_k^T h_k$$

onde $\theta = \theta_1 + \theta_2$. O corte agregado corresponde à soma dos dois cortes desagregados.

No livro texto, o corte é escrito como

$$\theta + E_l x \geq e_l$$

onde $E_l = \sum_k \pi_k^T T_k$, $e_l = \sum_k \pi_k^T h_k$.

Somando os cortes de otimalidade produzidos para $k = 1, 2$ temos

$$\theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520$$

que será inserido no próximo RBMP.

$$\begin{aligned} z = \min \quad & 100x_1 + 150x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 \geq 40 \\ & x_2 \geq 20 \\ & \theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520 \end{aligned}$$

Solução ótima $\bar{x} = (40, 80)^T$, $\bar{\theta} = -18299.2$, $z = -2299.2$.

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (40, 80)^T, \bar{\theta} = -18299.2$.

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 = (0.4)(-24)y_1 + (0.4)(-28)y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6y_1 + 10y_2 \leq 2400 \\ & 8y_1 + 5y_2 \leq 6400 \\ & y_1 \leq 500 \\ & y_2 \leq 100 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Subproblema finito com $\bar{y} = (400 \ 0)^T, w_1 = -9600(0.4) = -3840$,

$$\bar{\pi}_1 = (0.4)(-4 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (40, 80)^T, \bar{\theta} = -18299.2$.

$$\begin{aligned} \min \quad & w_2 = (0.6)(-28)y_1 + (0.6)(-32)y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6y_1 + 10y_2 \leq 2400 \\ & 8y_1 + 5y_2 \leq 6400 \\ & y_1 \leq 300 \\ & y_2 \leq 300 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Subproblema é finito com $\bar{y} = (300 \ 60)^T$,

$$w_2 = -10320(0.6) = -6192, \bar{\pi}_2 = (0.6)(-3.2 \ 0 \ -8.8 \ 0)^T$$

Multiplicadores empregados: $\bar{\pi}_1 = (0.4)(-4 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ e $\bar{\pi}_2 = (0.6)(-3.2 \ 0 \ -8.8 \ 0)^T$.

Somando os dois cortes desagregados (que poderíamos ter gerado)

$$\begin{aligned}\theta_1 + 96x_1 &\geq 0 \\ \theta_2 + 115.24x_1 &\geq -1584 \\ \rightarrow \theta + 211.2x_1 &\geq -1584\end{aligned}$$

Como $\bar{\theta} = -18299.2$, $\bar{x}_1 = 40$, temos $-18299.2 + 40(211.2) = -9851.2 \not\geq -1584$, a desigualdade é violada e deve ser inserida em um novo RBMP.

- $\bar{x} = (40, 80)^T \in K_2$.
- A solução $\bar{x} = (40, 80)^T$, $\bar{y}_1 = (400 \ 0)^T$, $\bar{y}_2 = (300 \ 60)^T$ fornece o seguinte limite superior para RP :

$$c^T \bar{x} + p^1(\hat{q}_1)^T \bar{y}_1 + p^2(\hat{q}_2)^T \bar{y}_2 = 5968.$$

Logo

$$RP \leq \min\{5968, -410\} = -410$$

- $RP \geq \max\{-\infty, -2299.2\} = -2299.2$
- $RP \in [-2299.2, -410]$.

$$\begin{aligned} z = \min \quad & 100x_1 + 150x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 \geq 40 \\ & x_2 \geq 20 \\ & \theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520 \\ & \theta + 211.2x_1 \geq -1584 \end{aligned}$$

Solução ótima $\bar{x} = (66.828 \ 53.172)^T, \bar{\theta} = -15697.994,$
 $z = -1039.375.$

- Para $\bar{x} = (66.828 \ 53.172)^T$, $\bar{\theta} = -15697.994$, geramos o corte de otimalidade

$$115.2x_1 + 96x_2 + \theta \geq -2104$$

- Resolvendo o RBMP seguinte:

$$z = \min \quad 100x_1 + 150x_2 + \theta$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 40$$

$$x_2 \geq 20$$

$$\theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520$$

$$\theta + 211.2x_1 \geq -1584$$

$$\theta + 115.2x_1 + 96x_2 \geq -2104$$

com solução $\bar{x} = (40 \ 33.75)^T$, $\bar{\theta} = -9952$, $z = -889.5$ obtemos o novo corte:

$$\theta + 133.44x_1 + 130.56x_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} z = \min \quad & 100x_1 + 150x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 \geq 40 \\ & x_2 \geq 20 \\ & \theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520 \\ & \theta + 211.2x_1 \geq -1584 \\ & \theta + 115.2x_1 + 96x_2 \geq -2104 \\ & \theta + 133.44x_1 + 130.56x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Com solução ótima

$$\bar{x} = (46.667 \quad 36.25)^T, \bar{\theta} = -10960, z = -855.833.$$

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (46.667 \ 36.25)^T, \bar{\theta} = -10960$.

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 = (0.4)(-24)y_1 + (0.4)(-28)y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6y_1 + 10y_2 \leq 2400 \\ & 8y_1 + 5y_2 \leq 6400 \\ & y_1 \leq 500 \\ & y_2 \leq 100 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Subproblema finito com $\bar{y} = (300 \ 100)^T$,

$$w_1 = -10000(0.4) = -4000, \bar{\pi}_1 = (0.4)(0 \ -3 \ 0 \ -13)^T$$

Solução de primeiro estágio: $\bar{x} = (46.667 \ 36.25)^T, \bar{\theta} = -10960$.

$$\begin{aligned} \min \quad & w_2 = (0.6)(-28)y_1 + (0.6)(-32)y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6y_1 + 10y_2 \leq 2400 \\ & 8y_1 + 5y_2 \leq 6400 \\ & y_1 \leq 300 \\ & y_2 \leq 300 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Subproblema é finito com $\bar{y} = (300 \ 100)^T$,

$$w_2 = -11600(0.6) = -6960, \bar{\pi}_2 = (0.6)(-2.32 \ -1.76 \ 0 \ 0)^T$$

Considerando $\bar{\pi}_1 = (0.4)(0 \ -3 \ 0 \ -13)^T$ e

$\bar{\pi}_2 = (0.6)(-2.32 \ -1.76 \ 0 \ 0)^T$

$$\theta_1 + 96x_2 \geq -520$$

$$\theta_2 + 83.52x_1 + 84.48x_2 \geq 0$$

$$\theta + 83.52x_1 + 180.48x_2 \geq -520$$

Verificando:

$$-10960 + 83.52(46.667) + 180.48(36.25) = -520$$

e a desigualdade não é violada.

A solução do RBMP é ótima para o RP, com custo $z = -855.833$.

- ❶ Neste exemplo não foram necessários cortes de viabilidade.
- ❷ Normalmente, uma abordagem que utiliza cortes desagregados requer menos iterações (menos RBMPs a serem resolvidos).
- ❸ Multiplicidade de soluções duais ótimas gera multiplicidade de cortes de Benders.
- ❹ Uma vez que $r + \sum_k s(k) < \infty$, e a cada RBMP pelo menos um corte (de otimalidade ou de viabilidade) é gerado, o método L-shaped (Benders) possui convergência finita.

$$\begin{aligned} z = \min \quad & \mathbb{E}_{\xi}(y_1 + y_2) \\ \text{s.t.} \quad & x \leq 10 \\ & x \geq 0 \\ & y_1 - y_2 = \xi - x \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Assumimos três cenários equiprováveis: $\xi \in \{1, 2, 4\}$.
- Observe que $K_1 \subseteq K_2$, uma vez que qualquer x viável no primeiro estágio é também viável no segundo.

$$\begin{aligned} z = \min \quad & \mathbb{E}_{\xi}(y_1 + y_2) \\ \text{s.t.} \quad & x \leq 10 \\ & x \geq 0 \\ & y_1 - y_2 = \xi - x \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Recordando $Q(x, \xi) = \min\{y_1 + y_2 : y_1 - y_2 = \xi - x, y \geq 0\}$ e
- $Q(x) = \mathbb{E}_{\xi} Q(x, \xi) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 Q(x, \xi_k)$.

$$\begin{aligned}
 z &= \min \mathbb{E}_{\xi}(y_1 + y_2) \\
 \text{s.t. } x &\leq 10 \\
 x &\geq 0 \\
 y_1 - y_2 &= \xi - x \\
 y_1, y_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$Q(x, \xi) = \min\{y_1 + y_2 : y_1 - y_2 = \xi - x, y \geq 0\}$$

- Para um par ξ e $\bar{x} \in K_1 = [0, 10]$, a solução ótima de segundo estágio é:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Se } \xi - \bar{x} \geq 0 & y_1 = \xi - \bar{x} & y_2 = 0 & Q(x, \xi) = \xi - \bar{x} \\
 \text{Se } \xi - \bar{x} \leq 0 & y_1 = 0 & y_2 = \bar{x} - \xi & Q(x, \xi) = \bar{x} - \xi
 \end{array}$$

Estrutura de $Q(x, \xi)$

Se $\xi - \bar{x} \geq 0$	$y_1 = \xi - \bar{x}$	$y_2 = 0$	$Q(x, \xi) = \xi - \bar{x}$
Se $\xi - \bar{x} \leq 0$	$y_1 = 0$	$y_2 = \bar{x} - \xi$	$Q(x, \xi) = \bar{x} - \xi$

Como temos $\xi \in \{1, 2, 4\}$, $Q(x)$ é linear por partes em $K_1 \cap K_2$:

$$x \in [0, 1] : \quad Q(x) = \frac{1}{3}(1 - x) + \frac{1}{3}(2 - x) + \frac{1}{3}(4 - x) = \frac{7}{3} - x$$

$$x \in [1, 2] : \quad Q(x) = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(2 - x) + \frac{1}{3}(4 - x) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

$$x \in [2, 4] : \quad Q(x) = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}(4 - x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$$

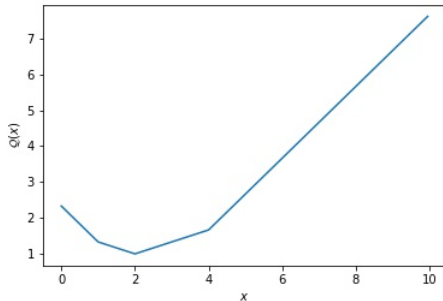
$$x \in [4, 10] : \quad Q(x) = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}(x - 4) = x - \frac{7}{3}$$

$$x \in [0, 1] : \quad Q(x) = \frac{7}{3} - x$$

$$x \in [1, 2] : \quad Q(x) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

$$x \in [2, 4] : \quad Q(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$$

$$x \in [4, 10] : \quad Q(x) = x - \frac{7}{3}x$$



- Cortes de otimalidade produzem uma *outer approximation* para $Q(x)$.
- A cada iteração em que um corte de otimalidade é inserido, uma aproximação melhor de $Q(x)$ é produzida.

Primeiro RBMP

$$\begin{array}{ll}\min & \theta \\ \text{s.t.} & x \leq 10 \\ & x \geq 0\end{array}$$

Tomamos um $\bar{x}$ qualquer em $[0, 10]$, por exemplo $\bar{x} = 0, \bar{\theta} = -\infty$.

$$W = [1 \quad -1], T_k = [1], h_k = [\xi_k], k = 1, 2, 3, \bar{x} = 0, \bar{\theta} = -\infty.$$

Problemas de Separação

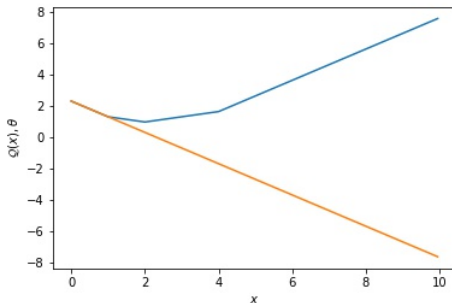
- Para $\xi = 1$: $w = \min\{1/3(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = 1, y \geq 0\}$, com $w = 1/3$, $\bar{y}^T = (1 \ 0)^T$, $\bar{\pi}_1 = 1/3$.
- Para $\xi = 2$: $w = \min\{1/3(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = 2, y \geq 0\}$, com $w = 2/3$, $\bar{y}^T = (2 \ 0)^T$, $\bar{\pi}_2 = 1/3$.
- Para $\xi = 4$: $w = \min\{1(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = 4, y \geq 0\}$, com $w = 4/3$, $\bar{y}^T = (4 \ 0)^T$, $\bar{\pi}_3 = 1/3$.

$\theta + \sum_k \bar{\pi}_k^T T_k x \geq \sum_k \bar{\pi}_k^T h_k \rightarrow \theta + x \geq \frac{7}{3}$. Corte violado é inserido em novo RBMP.

Segundo RBMP

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & x \leq 10 \\ & x \geq 0 \\ & \theta + x \geq \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = 10, \bar{\theta} = -\frac{23}{3}.$$



$$W = [1 \quad -1], T_k = [1], h_k = [\xi_k], k = 1, 2, 3, \bar{x} = 10, \bar{\theta} = -\frac{23}{3}.$$

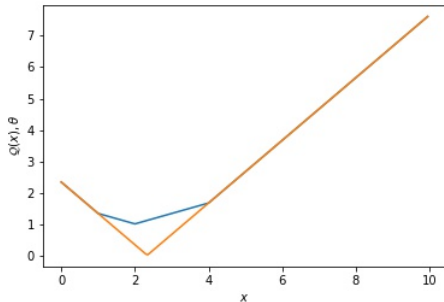
Problemas de Separação

- Para $\xi = 1$: $w = \min\{1/3(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = -9, y \geq 0\}$, com $w = 3$, $\bar{y}^T = (0 \ 9)^T$, $\bar{\pi}_1 = -1/3$.
 - Para $\xi = 2$: $w = \min\{1/3(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = -8, y \geq 0\}$, com $w = 8/3$, $\bar{y}^T = (0 \ 8)^T$, $\bar{\pi}_2 = -1/3$.
 - Para $\xi = 4$: $w = \min\{1(y_1 + y_2) : y_1 - y_2 = -6, y \geq 0\}$, com $w = 2$, $\bar{y}^T = (0 \ 6)^T$, $\bar{\pi}_3 = -1/3$.
-
- $\theta + \sum_k \bar{\pi}_k^T T_k x \geq \sum_k \bar{\pi}_k^T h_k \rightarrow \theta \geq x - \frac{7}{3}$, corte violado que é inserido em novo mestre.
 - Observe que a violação é $2\frac{23}{3}$, correspondente é a diferença entre $Q(10)$ e $\bar{\theta}$.

Terceiro RBMP

$$\begin{array}{ll}\min & \theta \\ \text{s.t.} & x \leq 10 \\ & x \geq 0 \\ & \theta + x \geq \frac{7}{3} \\ & \theta - x \geq -\frac{7}{3}\end{array}$$

$$\bar{x} = \frac{7}{3}, \bar{\theta} = 0.$$



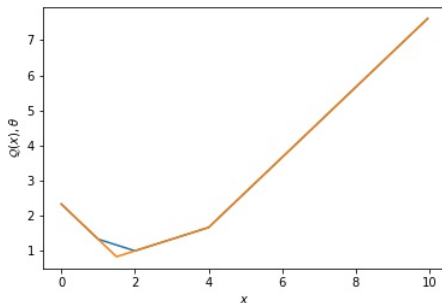
$$W = [1 \quad -1], T_k = [1], h_k = [\xi_k], k = 1, 2, 3, \bar{x} = \frac{7}{3}, \bar{\theta} = 0.$$

Resolvendo os problemas de separação adicionamos o corte:
 $\theta \geq \frac{1}{3}(x + 1).$

Quarto RBMP

$$\begin{aligned}
 &\min \theta \\
 &s.t. \ x \leq 10 \\
 &\quad x \geq 0 \\
 &\quad \theta + x \geq \frac{7}{3} \\
 &\quad \theta - x \geq -\frac{7}{3} \\
 &\quad \theta - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{\theta} = 0.8333.$$



$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, T_k = [1], h_k = [\xi_k], k = 1, 2, 3, \bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{\theta} = 0.8333.$$

Resolvendo os problemas de separação adicionamos o corte:

$$\theta \geq \frac{1}{3}(5 - x).$$

Quarto RBMP

$$\min \theta$$

$$s.t. \ x \leq 10$$

$$x \geq 0$$

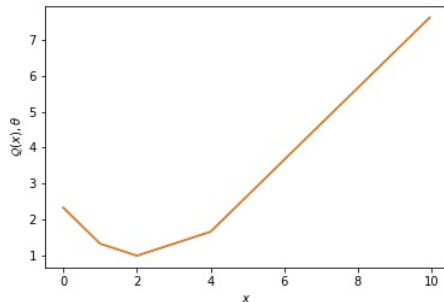
$$\theta + x \geq \frac{7}{3}$$

$$\theta - x \geq -\frac{7}{3}$$

$$\theta - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{3}$$

$$\theta + \frac{1}{3}x \geq \frac{5}{3}$$

$\bar{x} = 2, \bar{\theta} = 1$ que resolve o
BMP (e o RP).



- 1 Ao final da quinta iteração, uma descrição completa de $Q(x)$ é disponível.
- 2 Obviamente, não é necessário todos os hiperplanos suportes de $Q(x)$ para que o ótimo seja encontrado.
- 3 No caso do exemplo, o ótimo seria encontrado assim que os hiperplanos associados aos intervalos $[1, 2]$ e $[2, 4]$ fossem gerados pelo algoritmo de separação.
- 4 O ponto de partida do algoritmo influencia a trajetória do mesmo e o número de cortes gerados.
- 5 Uma solução heurística de boa qualidade e cortes de otimalidade associados a ela podem ajudar a acelerar o método L-Shaped.
- 6 Cortes de boa qualidade também podem ajudar a acelerar o método.

Primeiro RBMP

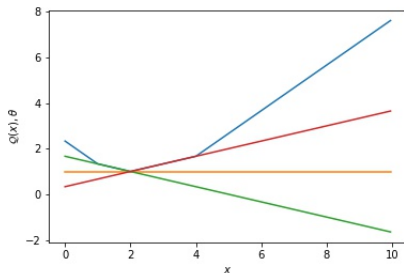
$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & x \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Como podemos escolher $\bar{x}$ qualquer em $[0, 10]$. Escolhemos, $\bar{x} = 2, \bar{\theta} = -\infty$. Qualquer $\bar{\pi}_2 = \alpha \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ é viável e ótimo para PSD(2). Logo, podemos gerar mais de um corte de otimalidade:

$$\begin{aligned} \theta &\geq 1 & \bar{\pi} &= \left(-\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3}\right)^T \\ \theta + \alpha x &\geq 1 + 2\alpha & \bar{\pi} &= \left(-\frac{1}{3} \quad \alpha \quad \frac{1}{3}\right)^T \end{aligned}$$

$\theta + \alpha x \geq 1 + 2\alpha$ é válido para qualquer $\alpha \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

$$\begin{array}{ll} \theta \geq 1 & \tilde{\pi} = \left(-\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3}\right)^T \\ \theta - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{3} & \tilde{\pi} = \left(-\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)^T \\ \theta + \frac{1}{3}x \geq \frac{5}{3} & \tilde{\pi} = \left(-\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)^T \end{array}$$



- As soluções duais afetam a qualidade dos cortes.
- Qual é a característica de $Q(x)$ em $x = \bar{x}$ que permite a existência de múltiplos cortes? É não diferenciável, assim seu subdiferencial não é unitário.

- O uso de cortes desagregados permite informar melhor os RBMPs; cada uma das funções recurso Q_k é aproximada individualmente.
- Espera-se com isso encontrar a solução ótima (e provar otimalidade) com menos interações (número de RBMPs resolvidos).
- Embora a melhor estratégia seja dependente do problema, a superioridade do uso de cortes desagregados é, via de regra, verificado na prática.
- Cortes desagregados criam RBMPs com mais restrições.

PSD(k)

$$\begin{aligned} \max \quad & (h_k - T_k \bar{x})^T \pi_k \\ & W^T \pi_k \leq p^k q_k \end{aligned}$$

PSP(k)

$$\begin{aligned} \min \quad & p^k q_k^T y_k \\ & W y_k = h_k - T_k \bar{x} \\ & y_k \geq 0 \end{aligned}$$

Introduzindo vetores de variáveis artificiais v^+, v^- . I é identidade de ordem m_k , e e é um vetor m_k dimensional de 1's.

PSD-M(k)

$$\begin{aligned} \max \quad & (h_k - T_k \bar{x})^T \pi_k \\ & W^T \pi_k \leq 0 \\ & \pi_k \leq e \\ & -\pi_k \leq e \end{aligned}$$

PSP-M(k)

$$\begin{aligned} \min \quad & e^T v^+ + e^T v^- \\ & W y_k + I v^+ - I v^- = h_k - T_k \bar{x} \\ & y_k, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

PSD-M(k)

$$\begin{aligned} \max \quad & (h_k - T_k \bar{x})^T \pi_k \\ & W^T \pi_k \leq 0 \\ & \pi_k \leq e \\ & -\pi_k \leq e \end{aligned}$$

PSP-M(k)

$$\begin{aligned} w(k) = \min \quad & e^T v^+ + e^T v^- \\ & Wy_k + lv^+ - lv^- = h_k - T_k \bar{x} \\ & y_k, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

Se $w(k)$, a fo ótima de PSP-M(k), satisfaz $w(k) > 0$:

- PSP(k) é inviável.
- Seja $\bar{\pi}_k$ a solução ótima de PSD-M(k).
- Por dualidade forte,

$$(h_k - T_k \bar{x})^T \bar{\pi}_k > 0.$$

- Encontramos um corte de viabilidade violado pela solução do RBMP. Inserimos o corte $\bar{\pi}_k^T T_k x \geq \bar{\pi}_k^T h_k$ em um novo RBMP.

PSD-M(k)

$$\begin{aligned} \max \quad & (h_k - T_k \bar{x})^T \tilde{\pi}_k \\ & W^T \tilde{\pi}_k \leq 0 \\ & \tilde{\pi}_k \leq e \\ & -\tilde{\pi}_k \leq e \end{aligned}$$

PSP-M(k)

$$\begin{aligned} w(k) = \min \quad & e^T v^+ + e^T v^- \\ & W y_k + l v^+ - l v^- = h_k - T_k \bar{x} \\ & y_k, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

Se $w(k) = 0$:

- PSP(k) é viável.
- Usamos a solução ótima de PSP-M(k) como uma base inicial para resolver PSP(k).
- Com a solução ótima do par PSP(k), PSD(k), procedemos como antes para separação de cortes de otimalidade.

Recuperando o exemplo BL §4.2

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + \mathbb{E}_{\xi} \min(-15y_1 - 12y_2) \\ \text{s.t.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \leq x_1 \\ & 2y_1 + 5y_2 \leq x_2 \\ & .8\xi_1 \leq y_1 \leq \xi_1 \\ & .8\xi_2 \leq y_2 \leq \xi_2 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

onde $\xi_1 \in \{4, 6\}$ e $\xi_2 \in \{4, 8\}$, com distribuições independentes, com probabilidade 0.5 para cada um dos casos.

Vamos considerar $\bar{x} = (0 \ 0)^T$ e o problema de separação relativo ao cenário $s = 4$, com $(\xi_1, \xi_2) = (6, 8)$

$$\begin{aligned}
 w = \min \quad & \sum_{i=1}^6 (v_i^+ + v_i^-) \\
 \text{s.t.} \quad & 3y_1 + 2y_2 + v_1^+ - v_1^- \leq 0 \\
 & 2y_1 + 5y_2 + v_2^+ - v_2^- \leq 0 \\
 & y_1 + v_3^+ - v_3^- \geq 4.8 \\
 & y_2 + v_4^+ - v_4^- \geq 6.4 \\
 & y_1 + v_5^+ - v_5^- \leq 6 \\
 & y_2 + v_6^+ - v_6^- \leq 8 \\
 & y, v^+, v^- \geq 0
 \end{aligned}$$

Solução ótima: $w = 11.2$, $\bar{v}_3^+ = 4.8$, $\bar{v}_4^+ = 6.4$, demais variáveis nulas na solução ótima. $\bar{\pi}_4 = (-\frac{3}{11} \ -\frac{1}{11} \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)^T$. Logo, PSP(4) é inviável, PSD(4) é ilimitado.

PSD-M(4) forneceu:

$$\bar{\pi}_4 = \left(-\frac{3}{11} \quad -\frac{1}{11} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right)^T$$

$T_4 = T$, onde

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.8 \\ 6.4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\pi}_4^T T_4 x \geq \bar{\pi}_4^T h_4$$

$$\frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 \geq 11.2$$

que é violada por $\bar{x}$ em 11.2 unidades.

RBMP

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & \frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 \geq 11.2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solução ótima: $\bar{x} = (41.067 \ 0)^T, \bar{\theta} = -\infty$.

Corte de viabilidade gerado a partir da solução de PSP-M(4)

$$x_2 \geq 22.4$$

RBMP

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & \frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 \geq 11.2 \\ & x_2 \geq 22.4 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solução ótima: $\bar{x} = (33.6 \ 22.4)^T, \bar{\theta} = -\infty$.

Corte de viabilidade gerado a partir da solução de PSP-M(4)

$$x_2 \geq 41.6$$

RBMP

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + \theta \\ \text{s.t.} \quad & \frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 \geq 11.2 \\ & x_2 \geq 41.6 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solução ótima: $\bar{x} = (27.2 \ 41.6)^T, \bar{\theta} = -\infty$.

Esta solução é viável para todos os cenários no segundo estágio. É necessário verificar se há algum corte de otimalidade a ser gerado (seguramente haverá, pois $\bar{\theta} = -\infty$).