Pós Graduação em Ciência da Computação

DCC-808 Programação Não Linear 2017/2

Lista de Exercícios #1

Prof. Alexandre Salles da Cunha

acunha@dcc.ufmg.br

Março de 2018

Data de entrega: 08 de Maio de 2018.

Questão 1: Mostre que $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ é um subespaço vetorial, determine sua dimensão e encontre uma base para $\mathcal{V}$.

Questão 2: Considere $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$.

1. Mostre que $\mathcal{P}$ é um conjunto afim de dimensão 2.
2. Encontre a distância Euclideana mínima de 0 a $\mathcal{P}$ e um ponto em $\mathcal{P}$ que atinge esta distância.

Questão 3: Usando a decomposição SVD (por exemplo, via `scilab`), escreva o conjunto $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b\}$ como um conjunto afim na forma $\{x : x^0 + v, v \in \mathcal{V}\}$ e reformule o problema de otimização $\min 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 : x \in \mathcal{P}$ como um problema definido em $v \in \mathcal{V}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questão 4: Sob quais condições impostas a $\alpha \in \mathbb{R}^n$ a função $f(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$?

Questão 5: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Mostre que $(x - y) \perp (x + y)$. Use este argumento para encontrar uma base para $\text{span}\{x, y\}$.

Questão 6: Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ vale a relação:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$$

(Dica: use a desigualdade de Cauchy-Schwartz).

Questão 7: Mostre que para qualquer vetor x, a função $card(x)$ definida como o número de coordenadas x_i não nulas de $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $card(x) \geq \frac{\|x\|_1^2}{\|x\|_2^2}$. Encontre vetores x para os quais a desigualdade é justa.

Questão 08 Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ duas matrizes. Mostre que o fato de $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B) \rightarrow \mathcal{R}(B^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$.

Questão 09 Mostre que para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathcal{N}(A^TA) = \mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A^TA) = \mathcal{R}(A^T)$. *Dica:* Use o Teorema Fundamental da Álgebra Linear.

Questão 10 (Teorema de Cayley-Hamilton) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e seu polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

1. Assuma que A seja diagonalizável. Prove que A satisfaz seu próprio polinômio característico, isto é:
$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I_n = 0$$

Questão 11 Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dois mapeamentos. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ um mapeamento composto $h = f(g(x))$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que as derivadas de h podem ser expressas como um produto matriz-matriz, $J_h(x) = J_f((g(x))J_g(x)$ onde $J_h(x)$ é o Jacobiano de h avaliado em x, isto é, a matriz cujo elemento na linha i e coluna j é $\frac{\partial d_i(x)}{\partial x_j}$.

Questão 12 Seja g um mapeamento afim da forma $g(x) = Ax + b$ para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que o Jacobiano de $h(x) = f(g(x))$ é $J_h(x) = J_f(g(x))A$.

Questão 13 Seja $g(x) = Ax + b$ um mapeamento afim para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e $h(x) = f(g(x))$. Mostre que:

1. $\nabla_x h(x) = A^T\nabla_g f(g(x))$
2. $\nabla_x^2 h(x) = A^T\nabla_g^2 f(g(x))A$

Questão 14 Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada de matriz de permutação se suas colunas são uma permutação das colunas da identidade I_n.

- Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ considere PA e AP. Qual é o significado destas duas matrizes ?
- Mostre que P é ortogonal.

Questão 15 Considere um sistema dinâmico linear regido pela recorrência:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ \ y(t) = Cx(t),\ \ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde t denota momentos discretos de tempo, $x(t)$ representa o estado do sistema no tempo t, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de entrada (controle) e $y(t)$ é o vetor de saída. As matrizes A, B, C representam o sistema física e são dadas.

1. Assumindo que o sistema tenha o estado inicial $x(0) = 0$, expresse o vetor de saída no momento T como uma função de $u(0), u(1), \ldots, u(T-1)$, isto é, determine a matriz H tal que $y(T) = HU(T)$ onde

$$U(T) := \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{pmatrix}$$

contém todas as entradas (controles) até e incluindo o tempo $T-1$.

2. Qual o significado de $\mathcal{R}(H)$?

Questão 16 Sejam $p, q \in \mathbb{R}^n$ dois vetores linearmente independentes tais que $\|q\|_2 = \|p\|_2 = 1$. Defina a matriz siménrica $A = pq^T + qp^T$.

1. Mostre que $p+q$ e $p-q$ são autovalores de A e determine os correspondentes autovalores.

2. Determine $\mathcal{N}(A)$ e posto(A).

3. Encontre uma decomposição em autovalores de A, em termos de p, q. *Dica: use os dois passos anteriores.*

4. Quais seriam as respostas para as questões anteriores se p, q não fossem normalizados ?

Questão 17 Para cada um dos casos a seguir, identifique a forma da região determinada pela restrição quadrática $x^T Ax \leq 1$.

$$1.\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2.\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questão 18 Como você poderia desenhar um elipsóide no $\mathbb{R}^2$, sendo este descrito pela restrição $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T Ax + 2b^T x + c \leq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, b \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$? Descreva o método o mais detalhadamente possível. Desenhe o elipsóide $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 + 4x_1 + 5x_2 + 3 \leq 1\}$.

Questão 19 Dispomos de um grafo não direcionado $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, $E \subseteq V \times V$. Defina o Laplaceano do grafo como a matriz L cujas entradas satisfazem

$$L_{ij} = \begin{cases} -1 & \{i,j\} \in E \\ |\delta(i)| & i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $\delta(i) \subseteq E$ denota o conjunto de arestas de E incidentes a i.

Considere $E = \{\{4,6\}, \{4,5\}, \{4,3\}, \{3,2\}, \{2,5\}, \{1,5\}, \{1,2\}\}$

1. Construa L para este caso e verifique que, para qualquer grafo, L é uma matriz simétrica.

2. Mostre que L é semi-positiva definida, provando a seguinte identidade, válida para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$:
$$u^T L u = q(u) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} (u_i - u_j)^2.$$
Dica: Encontre os valores $q(k), q(e_k + -e_l)$ para dois vetores unitáios e_k, e_l tais que $\{k, l\} \in E$.

3. Mostre que $\lambda = 0$ é sempre um autovalor para L e identifique um correspondente autovetor. *Dica:* Considere a matriz $L^{\frac{1}{2}}$.

4. G é conexo se há um caminho conectando qualquer par de seus vértices. Mostre que se o grafo for conexo, $\lambda = 0$ é um autovalor simples, isto é, $\dim(\mathcal{N}(L)) = 1$.

Questão 20 Sejam $A, B \in \mathcal{S}^n$ duas matrizes simétricas de ordem n. Defina a matriz produto elemento a elemento das entradas de A, B como $C = (C)_{i,j=1,\ldots,n}$ onde $C_{ij} = A_{ij} B_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. Mostre que C é positiva semi-definida uma vez que A, B sejam positivas semi-definidas. *Dica:* Prove que o resultado é verdadeiro quando A é uma matriz de posto 1 e estenda o resultado para o caso geral, usando a decomposição espectral de A.

Questão 21 Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(A) = 0$. É correto dizer que $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^T)$? Em caso positivo prove, em caso negativo, forneça um contra exemplo.

Questão 22 Duas matrizes $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ são equivalentes unitárias se $A = QBQ^*$ para alguma matriz $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitária. É verdadeiro ou falso que A, B são equivalentes se e somente se possuem os mesmos valores singulares ?

Questão 23 Para cada uma das afirmativas abaixo, prove que é verdadeira ou forneça um contra-exemplo.

1. Se λ é um ew (autovalor) de A e $\mu \in \mathbb{C}$, então $\lambda - \mu$ é um ew de $(A - \mu I)$.

2. Se A é real e λ é um ew de A, o mesmo pode ser dito de $-\lambda$.

3. Se λ é ew de A não singular, então λ^{-1} é autovalor de A^{-1}.

4. Se todos os ews de A são nulos então $A = 0$.

5. Se A é hermitiana (isto é, $A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A = A^*$, onde A^* é sua transposta conjugada) então $|\lambda|$ é um valor singular de A.

6. Se A é diagonalizável e todos seus ews são iguais então A é diagonal.

Questão 24: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Determine usando *papel e lápis* uma decomposição real SVD de A na forma $A = U\Sigma V^T$. A decomposição não é única, de forma que encontre uma que possui o mínimo número de sinais negativos em V, U.

2. Liste os valores singulares, vetores singulares à direita e à esquerda. Desenhe um disco unitário no $\mathbb{R}^2$ e sua imagem diante da transformação linear induzida por A, em conjunto com todos os vetores singulares.

3. Quais são as normas $1, 2, \infty$ e de Frobenius de A ?

4. Encontre A^{-1} via a decomposição SVD.

5. Encontre os autovalores de A.

6. Qual é a área do elispóide que corresponde à imagem da transformação do disco unitário ?

Questão 25: Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possua uma decomposição SVD do tipo $A = U\Sigma V^*$ (V^* é a transposta conjugada de V). Encontre uma decomposição espectral da matriz hermitiana $2n \times 2n$ $\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$.