# Pós Graduação em Ciência da Computação
# DCC-808 Programação Não Linear 2018/1
# Lista de Exercícios #2

Prof. Alexandre Salles da Cunha

acunha@dcc.ufmg.br

Maio de 2018

**Data de entrega: 12 de Junho de 2018.**

## 1 Parte teórica

**Questão 1:** Considere o processo iterativo dado por

$$x^{k+1} = \frac{1}{2}\left(x^k + \frac{a}{x^k}\right) \tag{1}$$

onde $a > 0$. Assumindo que o processo convirja, para qual valor converge ? Qual é a ordem de convergência ?

**Questão 2:** Considere o problema

$$\min \; 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11 \tag{2}$$

1. Encontre um ponto que satisfaça as condições necessárias de primeira ordem.
2. Mostre que este ponto é um mínimo global do problema
3. Qual deve ser a taxa de convergência do método do gradiente puro para este problema ?
4. Iniciando com $x = y = 0$, quantos passos do método devem ser realizados para que a função objetivo seja reduzida para não mais de $10^{-11}$ ?

**Questão 3** Considere que $v_1, \ldots, v_n$ sejam os autovalores de uma matriz simétrica $Q$, positiva definida, de ordem $n$. Considere o problema quadrático

$$\min f_0(x) = \min \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x : \ x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

e suponha que $x^0$ seja escolhido de forma que $g^0 = \nabla f_0(x^0)$ pertença ao subespaço $M$ gerado por um subconjunto qualquer dos autovetores de $Q$.

1. Mostre que o método do gradiente gera pontos $x^k \in M$.

2. Considere a instância do problema (3) dada por $b = (0.76 \quad 0.08 \quad 1.12 \quad 0.68)^T$ e

$$Q = \begin{pmatrix} 0.78 & -0.02 & -0.12 & -0.14 \\ -0.02 & 0.86 & -0.04 & 0.06 \\ -0.12 & -0.04 & 0.72 & -0.08 \\ -0.14 & 0.06 & -0.08 & 0.74 \end{pmatrix}.$$

   Encontre a taxa de convergência do método neste caso.

**Questão 4** Se a matriz $Q$ em (3) tiver um número de condição de 10, quantas iterações o método do gradiente puro seriam necessárias para obter precisão na sexta casa decimal no valor da função objetivo do problema quadrático ?

**Questão 5** Suponha que para resolver (3), um algoritmo iterativo que funcione de acordo com a iteração típica

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$

onde $\alpha^k$ é o ponto de mínimo obtido com a busca unidirecional e $d^k$ satisfaça:

- $d^k g^k < 0$ ($g^k = \nabla f_0(x^k)$)
- $((d^k)^T g^k)^2 \geq \beta((d^k)^T Q d^k)((g^k)^T Q^{-1} g^k)$ para $0 < \beta \leq 1$

Estime a taxa de convergência do método.

**Questão 6** Considere $f_0(x)$ definida por (3) para $Q \in \mathcal{S}^n_{++}$. Seja $x^1 \in \mathbb{R}^n$ um ponto no subespaço contendo uma direção $d$ e $x^2$ o mínimo de $f_0(x)$ sobre outro subespaço, também contendo o vetor $d$. Suponha $f_0(x^1) < f_0(x^2)$. Mostre que $x^2 - x^1$ e $d$ são $Q-$conjugadas.

**Questão 7** Considere $Q \in \mathcal{S}^n$ (simétrica) e dois de seus autovetores, $v_1, v_2$, respectivamente associados a autovalores $\lambda_1, \lambda_2$ distintos. Mostre que $v_1, v_2$ são $Q$ conjugados.

**Questão 8** Mostre que no Método do Gradiente Conjugado, temos que $Qd^{k-1} \in \mathcal{M}^{k+1}$ onde $\mathcal{M}^k = \text{span}\{d^0, d^1, \ldots, d^{k-1}\}$ e as direções $d$'s são as direções conjugadas avaliadas pelo método.

**Questão 9** Suponha que o espectro de $Q$ seja conhecido e que seus autovalores situem-se ou no intervalo $[a, A]$ ou no intervalo $[a+\Delta, A+\Delta]$, onde $a, A, \Delta$ são reais positivos. Mostre que o método do Gradiente Parcial, reinicializado a cada dois passos completos, convergirá com uma taxa não maior que $\left(\frac{A-a}{A+a}\right)^2$, independentemente do valor de $\Delta$.

**Questão 10** Por que o método de Newton não pode ser usado satisfatoriamente para minimizar $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$ usando como partida $x^0 = 0$ ? Apresente uma maneira de remediar esta dificuldade.

**Questão 11** Considere o método DFP aplicado para o caso quadrático (3).

1. Mostre que o método gera matrizes $H^{k+1} \in \mathcal{S}^n_{++}$ sempre que $H^k \in \mathcal{S}^n_{++}$, diante da hipótese que $\alpha_k$ é obtido via minimização exata, isto é, $\alpha_k = \arg\min_\alpha f_0(x^k + \alpha H^K \nabla f_0(x^k))$.

2. Mostre que para qualquer $\alpha_k > 0$ tal que $(x^{k+1} - x^k)^T(\nabla f_0(x^{k+1}) - \nabla f_0(x^k)) > 0$, o mesmo comportamento desejável se observa.

3. Mostre que se $H^0 = I_n$ (identidade de ordem $n$), DFP é o Método do Gradiente Conjugado.

4. Qual observação análoga ao enunciado da questão imediatamente acima pode ser formulada se $H^0$ é uma matriz simétrica positiva definida qualquer ?

## 2 Parte experimental/numérica

**Questão 12** Implemente o métodos do Gradiente, Gradiente Conjugado (Aproximação Quadrática e Busca Unidirecional), Newton (Puro e Modificado com busca unidirecional), DFP e BFGS para obter o mínimo das funções indicadas abaixo.

Para a busca unidirecional, considere uma variante de cada método: uma utilizando a Seção Aurea e para outra, alguma busca inexata qualificada (Armijo + Wolfe, por exemplo, ou Armijo com backtracking). Apresente seus resultados de forma que possa comparar as taxas de convergência dos métodos, o progresso da função objetivo e o impacto da exatidão da busca unidirecional.

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= \sum_{i=1}^{n-1}(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2) && n \in \{2, 3, 7\} \\
f_0(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i && n \in \{5, 20, 100\} \\
f_0(x, y) &= (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2
\end{aligned}
$$