# Dualidade em Programação Linear

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

acunha@dcc.ufmg.br

Julho 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

UFMG - ICEx DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

## Relativas à esta apresentação


1. D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997. [Cap. 4, até Seção 4.6]
2. R. J. Vanderbei. Linear Programming: Foundations and Extensions, Springer, 4a. Edição, 2014. [Caps. 5]
3. V. Chvátal. Linear Programming. Freeman, 1983. [Caps. 5].

$$
\begin{array}{lrrrrl}
(P)\ \max z = & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
& x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
& 5x_2 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
& -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
& x_i & \geq 0 & & i = 1, \ldots, 4 &
\end{array}
$$

- Uma estratégia para resolver problemas de otimização: Encontrar limites inferiores $LB$ e superiores $UB$ provadamente válidos para o valor ótimo $z^*$ do programa acima, tais que $LB = UB$.

- Qualquer solução viável fornece limites inferiores (primais), por exemplo $x = (2, 1, 1, \frac{1}{2})^T$.

- Como obter limites superiores (duais) ?

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max z = & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
& x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
& 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
& -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
& x_i & \geq 0 & & i = 1, \ldots, 4 &
\end{array}
$$

## Ideia central

Criando desigualdades agregadas, por meio da multiplicações das restrições do problema por <u>valores convenientemente escolhidos.</u>

- Por exemplo, multiplicando a segunda restrição por $\frac{5}{3}$ e as demais por 0 e somando o resultado:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
& \frac{5}{3}(5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4) & \leq \frac{5}{3}55 \\
= & \frac{25}{3}x_1 & +\frac{5}{3}x_2 & +5x_3 & +\frac{40}{3}x_4 & \leq \frac{275}{3}
\end{array}
$$

$$\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

O fato de que as variáveis são não negativas combinado ao fato de que os coeficientes das variáveis na restrição agregada pelo menos igualam os coeficientes na função objetivo

- $x_1 \geq 0$ e $\frac{25}{3} \geq 4$,
- $x_2 \geq 0$ e $\frac{5}{3} \geq 1$,
- $x_3 \geq 0$ e $5 \geq 5$,
- $x_4 \geq 0$ e $\frac{40}{3} \geq 3$,

permitem escrever

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

Logo, o valor da função objetivo para qualquer solução viável é limitado superiormente por $\frac{275}{3}$ e, em particular, $z^* \leq \frac{275}{3}$.

1. Mutiplicando a $i-$ésima desigualdade por $p_i \geq 0$:

$$\begin{array}{rrrrl} p_1(x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4) & \leq 1p_1 \\ p_2(5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4) & \leq 55p_2 \\ p_3(-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4) & \leq 3p_3 \end{array}$$

2. Somando o resultado:

$$\begin{array}{rl} x_1(p_1 + 5p_2 - p_3) & + \\ x_2(-p_1 + p_2 + 2p_3) & + \\ x_3(-p_1 + 3p_2 + 3p_3) & + \\ x_4(+3p_1 + 8p_2 - 5p_3) & \leq p_1 + 55p_2 + 3p_3 \end{array}$$

1. Se agora impusermos que os coeficientes em $x_1, \ldots, x_4$ na desigualdade agregada igualem ou excedam os da função objetivo

$$\begin{aligned} p_1 + 5p_2 - p_3 &\geq 4 \\ -p_1 + p_2 + 2p_3 &\geq 1 \\ -p_1 + 3p_2 + 3p_3 &\geq 5 \\ +3p_1 + 8p_2 - 5p_3 &\geq 3 \end{aligned}$$

2. Garantimos que

$$w = p_1 + 55p_2 + 3p_3$$

fornece um limite superior para o valor da função objetivo de qualquer solução viável, em particular para a solução ótima.

- É natural tentar encontrar o vetor $(p_1, p_2, p_3)^T$ que fornece o melhor (mais baixo) limite superior válido.

## O Problema Dual associado a (P)

$$
\begin{aligned}
\text{(D) min w} = \quad & p_1 + 55p_2 + 3p_3 \\
& p_1 + 5p_2 - p_3 \geq 4 \\
& -p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1 \\
& -p_1 + 3p_2 + 3p_3 \geq 5 \\
& +3p_1 + 8p_2 - 5p_3 \geq 3 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Aplicando a mesma ideia a um problema de minimização

## Problema primal

$$
\begin{aligned}
\min \text{ w} = \quad & p_1 + 55p_2 + 3p_3 \\
& p_1 + 5p_2 - p_3 \geq 4 \\
& -p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1 \\
& -p_1 + 3p_2 + 3p_3 \geq 5 \\
& +3p_1 + 8p_2 - 5p_3 \geq 3 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

# De uma forma geral

**Problema Primal**

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

**Problema Dual**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i p_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq c_j \quad j = 1, \ldots, n \\ & p_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- A restrição primal $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ é associada a uma variável dual $p_i$ (e vice-versa).
- A restrição dual $\sum_i a_{ij} p_i \geq c_j$ é associada a uma variável primal $x_j$ (e vice-versa).
- Os coeficientes na função objetivo de um programa aparecem no outro, como termo independente do sistema de restrições.
- Se o primal é escrito na forma de minimização, seu dual será um PPL de maximização.

1. Reformulando a função objetivo, associando os multiplicadores de Farkas e projetando $x$ das restrições do PPL (assumimos factível)

$$\begin{array}{rrcll} \max & & z & & \\ & -c^T x & \leq & -z & \quad p_0 \in \mathbb{R}_+ \\ & Ax & \leq & b & \quad p \in \mathbb{R}_+^m \\ & -x & \leq & 0 & \quad v \in \mathbb{R}_+^n, \end{array}$$

2. obtemos as restrições agregadas $u_0 z \leq p^T b$ para todo $(p_0, p, v)$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} p^T A - p_0 c^T - v^T I &= 0 \\ (p_0, p, v) &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{w} = \quad & \min p^T b \\ & A^T p \geq c \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

# Estrutura geral do par primal-dual

**Primal**

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x \\
& a_i^T x \geq b_i, \ \ i \in M_1 \\
& a_i^T x \leq b_i, \ \ i \in M_2 \\
& a_i^T x = b_i, \ \ i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, \ \ j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, \ \ j \in N_2 \\
& x_j \text{ irrestrito}, \ \ j \in N_3
\end{aligned}
$$

**Dual**

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & b^T p \\
& p_i \geq 0, \ \ i \in M_1 \\
& p_i \leq 0, \ \ i \in M_2 \\
& p_i \text{ irrestrito }, \ \ i \in M_3 \\
& p^T A_j \leq c_j, \ \ j \in N_1 \\
& p^T A_j \geq c_j, \ \ j \in N_2 \\
& p^T A_j = c_j, \ \ j \in N_3
\end{aligned}
$$

**Teorema**

*Se transformarmos o problema dual em um problema de minimização e escrevermos o seu dual, obteremos um problema de otimização equivalente ao problema primal.*

Exemplo:

$$\begin{array}{lrrrcl} \min & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ & -x_1 & +3x_2 & & = & 5 \\ & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq & 6 \\ & & & x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & \geq & 0 & & \\ & x_2 & \leq & 0 & & \\ & x_3 & \gtrless & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrcl} \max & 5p_1 & +6p_2 & +4p_3 & & \\ & -p_1 & +2p_2 & & \leq & 1 \\ & 3p_1 & -p_2 & & \geq & 2 \\ & & 3p_2 & +p_3 & = & 3 \\ & p_1 & \gtrless & 0 & & \\ & p_2 & \geq & 0 & & \\ & p_3 & \leq & 0 & & \end{array}$$

# Equivalências entre pares primal-dual

## Par primal-dual I

$$
\begin{array}{rrcrr}
\min & c^T x & \quad & \max & p^T b \\
 & Ax \geq b & & & p \geq 0 \\
 & x \gtrless 0 & & & p^T A = c^T
\end{array}
$$

## Par primal-dual II - introduzindo folgas

$$
\begin{array}{rrcrr}
\min & c^T x + 0s & \quad & \max & p^T b \\
 & Ax - Is = b & & & p \gtrless 0 \\
 & x \gtrless 0 & & & p^T A = c^T \\
 & s \geq 0 & & & -p \leq 0
\end{array}
$$

## Par primal-dual III - introduzindo variáveis não negativas

$$
\begin{array}{rrcrr}
\min & c^T x^+ - c^T x^- & \quad & \max & p^T b \\
 & Ax^+ - Ax^- \geq b & & & p \geq 0 \\
 & x^+ \geq 0 & & & p^T A \leq c^T \\
 & x^- \geq 0 & & & -p^T A \leq -c^T
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & p^T b \\ & p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

- Vamos assumir que $a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i a_i$ para escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$.
- Para qualquer $x$ viável: $b_m = a_m^T x = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i a_i^T x = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i b_i$.
- As restrições duais $\sum_{i=1}^{m} p_i a_i^T \leq c^T$ podem ser reescritas como: $\sum_{i=1}^{m-1} (p_i + \gamma_i p_m) a_i^T \leq c^T$.
- Além disto, $\sum_{i=1}^{m} p_i b_i = \sum_{i=1}^{m-1} (p_i + \gamma_i p_m) b_i$.
- Defina $q_i = p_i + \gamma_i p_m$ e verifique que dual equivale a:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{m-1} q_i b_i \\ & \sum_{i=1}^{m-1} q_i a_i^T \leq c^T \end{aligned}$$

## Teorema (Dualidade Fraca)

Se $x$ é uma solução viável para o problema primal (P) e $p$ é uma solução viável para o seu dual (D), então $p^T b \leq c^T x$.

$$(P)\ \min \quad \begin{aligned} c^T x & \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D)\ \max \quad \begin{aligned} p^T b & \\ p^T A &\leq c^T \end{aligned}$$

## Demonstração

$$\begin{aligned} Ax = b &\rightarrow p^T A x = p^T b \\ p^T A \leq c^T &\rightarrow p^T A x \leq c^T x \\ p^T b \leq c^T x & \end{aligned}$$

1. Se o custo primal ótimo é $-\infty$, então o dual deve ser inviável.

2. Se o custo dual ótimo é $\infty$, então o problema primal deve ser inviável.

3. Se $x$ e $p$ são soluções viáveis para P e D, respetivamente e se $p^T b = c^T x$, então $x, p$ resolvem P,D.

**Teorema**

*Se o programa primal (P) possui uma solução ótima $x^*$, então o seu dual (D) possui uma solução $p^*$ tal que $b^T p^* = c^T x^*$.*

**Demonstração**

Caso - 1: Primal na forma padrão e posto($A$)$=m$, completo.

- Assumindo que o Método Simplex tenha sido executado com a regra de Bland, obtemos uma solução ótima associada à base ótima $B$, isto é, $x_B^* = c_B^T B^{-1} b \geq 0$ e $x_N^* = 0$, $\overline{c} \geq 0$, onde $N$ denota o conjunto dos índices das variáveis não básicas na solução ótima.
- Defina ${p^*}^T = c_B^T B^{-1}$ e verifique que $p^*$ é dual viável (Critério de parada do Simplex: $\overline{c} \geq 0$).
- Observe que ${p^*}^T b = c_B^T B^{-1} b = c^T x^*$, o resultado segue.

### Demonstração

Caso 2 - posto$(A) < m$, incompleto e o problema não escrito na forma padrão.

- Reescreva o PPL primal na forma padrão, elimine as linhas redundantes e redefina as varivéis duais.

## Primal

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& 2x_1 + 2x_2 = 3
\end{aligned}
$$

## Dual

$$
\begin{aligned}
\max \quad & p_1 + 3p_2 \\
& p_1 + 2p_2 = 1 \\
& p_1 + 2p_2 = 2
\end{aligned}
$$

# Possibilidades do par primal-dual

| | Ótimo Finito | Ilimitado | Inviável |
|---|---|---|---|
| Ótimo finito | Possível | Impossível | Impossível |
| Ilimitado | Impossível | Impossível | Possível |
| Inviável | Impossível | Possível | Possivel |

Uma importante relação entre as soluções primal-dual ótimas é expresso na forma da condição de complementaridade folga (ccf):

### Teorema

*Sejam $x$ e $p$ duas soluções viáveis, respectivamente para os programas primal e dual. Os vetores $x$ e $p$ são ótimos se e somente se:*

$$\begin{aligned} p_i(a_i^T x - b_i) &= 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ (c_j - p^T A_j)x_j &= 0 \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

($\rightarrow$) Se $x, p$ são viáveis e satisfazem ccf, então o par $x, p$ é ótimo.

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(a_i^T x - b_i) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i a_i^T x = \sum_{i=1}^{m} p_i b_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j(c_j - p^T A_j) = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = p^T \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \quad = p^T b$$

Face à Dualidade Fraca e como $p^T b = c^T x$, demonstra-se a otimalidade do par $x, p$.

$(\leftarrow)$ Se o par $x, p$ é viável e ótimo, então ccf são satisfeitas.

- Defina $u_i = p_i(a_i^T x - b_i)$ e $v_j = (c_j - p^T A_j)x_j$.
- Observe que dado a viabilidade de $x, p$ temos que $u_i \geq 0, \forall i$ e $v_j \geq 0, \forall j$.
- Observe ainda que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \ & \textstyle\sum_{i=1}^{m} p_i a_i^T x - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i && + \\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T \sum_{j=1}^{n} A_j x_j && = \\ & c^T x - p^T b && = \quad 0 \end{aligned}$$

Logo, como $u_i \geq 0, \forall i$, $v_j \geq 0, \forall j$ temos que:

$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \rightarrow \begin{cases} u_i = 0 & \forall i \\ v_j = 0 & \forall j \end{cases}$

$$
\begin{array}{llrl}
\min & 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 & & \\
& 5x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 8 \\
& 3x_1 + x_2 & = & 3 \\
& x \geq 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrl}
\max & 8p_1 + 3p_2 & & \\
& 5p_1 + 3p_2 & \leq & 13 \\
& p_1 + p_2 & \leq & 10 \\
& 3p_1 & \leq & 6
\end{array}
$$

- As condições $p_i(b_i - a_i^T x) = 0$ são automaticamente satisfeitas para qualquer $x$ viável.
- Vamos considerar a solução ótima $x^* = (1, 0, 1)^T$. Para a variável não básica $x_2$, temos que $x_2^*(c_2 - p^T A_2) = 0$, uma vez que $x_2^* = 0$.
- Resolvendo o sistema linear associado a $p^T B = c_B^T$:

  $$
  \begin{array}{rcrcr}
  5p_1 & + & 3p_2 & = & 13 \\
  3p_1 & & & = & 6
  \end{array}
  $$

  cuja solução é $p_1^* = 2, p_2^* = 1$ e custo dual é 19.

## Primal

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Hipóteses:

- linhas de $A$ são li, i.e., $A$ possui posto completo.
- existe solução básica ótima não degenerada $x^*$.
- vamos assumir que $B$ seja a base ótima associada.
- Vamos assumir também que $p^T = c_B B^{-1}$ seja o vetor dual ótimo associado a esta base.

O que acontece se perturbarmos por $d$ o vetor $b$ ?

1. Desde que a perturbação seja pequena o suficiente para que $B^{-1}(b + d) \geq 0$, a base ótima permanece a mesma.
2. Esta perturbação suficientemente pequena para que a base ótima permaneça a mesma existe como consequência da não degeneração primal.
3. Se a base permanece viável, não há modificação na condição de otimalidade primal (ou viabilidade dual), portanto permance ótima.
4. Com a perturbação, o custo dual passa de $p^T b$ para $p^T(b + d)$.
5. Logo uma mudança de uma unidade no $i-$ésimo termo independente acarreta uma modificação de custo de $p_i$, na função objetivo dual e, no novo objetivo primal.
6. As variáveis duais podem ser interpretadas como o custo marginal por unidade de aumento de $b_i$.

**Primal**

Por exemplo o Problema da Dieta, que consiste em escolher alimentos $x_j : j \in J$ de forma a satisfazer necessidades $b_i$ de nutrientes $i \in I$, ao mínimo custo:

$$\min c^T x : \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

1. Vamos considerar a variável primal $x_j$ cujo custo é $c_j$, $x_j > 0$ na solução ótima.
2. Complementaridade-folga: $x_j(c_j - p^T A_j) = 0$. Logo, $c_j = p^T A_j$.
3. O custo do alimento (variável primal) empregado na dieta pode ser escrito em termos dos valores das variáveis duais, que refletem os preços dos nutrientes empregados, em condições de equilíbrio.
4. As variáveis duais ótimas refletem os preços dos nutrientes que poderiam ser praticados na venda dos nutrientes puros, sintetizados.

## Notação a ser empregada no par primal-dual

$$\begin{aligned}
\max \quad z = & \sum_{j=m+1}^{m+n} c_j x_j \\
& \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} x_j \leq b_i && i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 && j = m+1, \ldots, n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad w = & \sum_{i=1}^{m} b_i p_i \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq c_j && j = m+1, \ldots, m+n \\
& p_i \geq 0 && i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

## Correspondência entre a indexação de variáveis

- Variáveis estruturais primais: $x_{m+j} : j = 1, \ldots, n$.
- Variáveis de folga primais: $x_i : i = 1, \ldots, m$.
- Variáveis estruturais duais: $p_i : i = 1, \ldots, m$.
- Variáveis de folga duais: $p_{m+j} : j = 1, \ldots, n$.

## Observações sobre a organização dos dicionários primal-dual

1. Base no primal: $m \times m$. Base no dual: $n \times n$.
2. Quando uma variável de folga primal $x_i$ é básica, a variável dual $p_i$ associada a $i-$ésima restrição primal é não básica. Quando a folga $x_i$ é não básica, a dual $p_i$ é básica.
3. Quando uma variável estrutural primal $x_{m+j}$ é básica, a variável de folga dual $p_{m+j}$ associada à $j-$ésima restrição dual (à qual se associa a variável $x_{m+j}$) é não básica. Quando $x_{m+j}$ é não básica, a folga dual $p_{m+j}$ é básica.

## Primal e dual na forma de maximização

$$\begin{aligned}
\max \quad z = \sum_{j=m+1}^{m+n} c_j x_j & \\
\sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} x_j \leq b_i & \qquad i = 1, \ldots, m \\
x_j \geq 0 & \qquad j = m+1, \ldots, n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad -w = \sum_{i=1} (-b_i) p_i & \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq c_j & \qquad j = m+1, \ldots, m+n \\
p_i \geq 0 & \qquad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

## PPL primal

$$
\begin{array}{lllll}
\max\ 4x_3 & -13x_4 & +7x_5 & & \\
3x_3 & +2x_4 & +5x_5 & \leq & 5 \\
1x_3 & -3x_4 & +2x_5 & \leq & 3 \\
x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Dual

$$
\begin{array}{llll}
\min\ 5p_1 & +3p_2 & & \\
3p_1 & +p_2 & \geq & 4 \\
2p_1 & -3p_2 & \geq & -13 \\
5p_1 & +2p_2 & \geq & 7 \\
p_1 & p_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Dicionário primal inicial: entra $x_3$, sai $x_1$

$$
\begin{array}{rlrrr}
\max \ z = & 0 & +4x_3 & -13x_4 & +7x_5 \\
x_1 = & 5 & -3x_3 & -2x_4 & -5x_5 \\
x_2 = & 3 & -1x_3 & +3x_4 & -2x_5
\end{array}
$$

## Dicionário dual correspondente (inviável): sai $p_3$, entra $p_1$.

$$
\begin{array}{rlrr}
\max \ -w = & 0 & -5p_1 & -3p_2 \\
p_3 = & -4 & +3p_1 & +p_2 \\
p_4 = & +13 & +2p_1 & -3p_2 \\
p_5 = & -7 & +5p_1 & +2p_2
\end{array}
$$

É o "transposto com o sinal trocado" do dicionário primal....

## Segundo dicionário primal: entra $x_5$, sai $x_3$

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x_1 - \frac{47}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\
x_3 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_5 \\
x_2 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{11}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5
\end{aligned}
$$

## Dicionário dual correspondente: sai $p_5$, entra $p_3$.

$$
\begin{aligned}
\max \quad -w &= -\frac{20}{3} - \frac{5}{3}p_3 - \frac{4}{3}p_2 \\
p_1 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{3}p_2 \\
p_4 &= \frac{47}{3} + \frac{2}{3}p_3 - \frac{11}{3}p_2 \\
p_5 &= -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_2
\end{aligned}
$$

## Terceiro dicionário primal: ótimo

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 7 && -\frac{7}{5}x_1 && -\frac{1}{5}x_3 && -\frac{79}{5}x_4 \\
x_2 &= 1 && +\frac{2}{5}x_1 && +\frac{1}{5}x_3 && +\frac{19}{5}x_4 \\
x_5 &= 1 && -\frac{1}{5}x_1 && -\frac{3}{5}x_3 && -\frac{2}{5}x_4
\end{aligned}
$$

## Dicionário dual correspondente: dual viável e ótimo.

$$
\begin{aligned}
\max \quad -w = &-7 && -p_2 && -p_5 \\
p_1 &= \frac{7}{5} && -\frac{2}{5}p_2 && +\frac{1}{5}p_5 \\
p_3 &= \frac{1}{5} && -\frac{1}{5}p_2 && +\frac{3}{5}p_5 \\
p_4 &= \frac{79}{5} && -\frac{19}{5}p_2 && +\frac{2}{5}p_5
\end{aligned}
$$

1. Definimos o vetor dual $p^T = c_B^T B^{-1}$ associado a $B$ e observamos que a condição de otimalidade de $B$ para o primal (custos reduzidos não negativos: $c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0$) equivale à condição de viabilidade de $B$ para o programa dual $p^T A \leq c^T$.
2. O Método Simplex é um algoritmo primal, pois troca de bases primais viáveis (duais inviáveis) durante suas iterações e quando encontra uma base $B$ tal que $p^T = c_B^T B^{-1}$ é dual viável, comprova a otimalidade do par de soluções.
3. Uma alternativa ao Primal Simplex é o Método Dual Simplex que gera soluções básicas viáveis para o problema dual e caminha pela viabilidade dual, até que encontra uma base primal viável e ótima.
4. Atenção: O Método Dual Simplex não consiste no emprego do Método Simplex no programa dual. O Método Dual Simplex não é um método primal, pois opera no dicionário primal inviável, mantendo viabilidade no programa dual.

## Dicionário primal (forma padrão do PPL)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & w = & c_B^T B^{-1} x_B & + \quad (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\
 & x_B = & B^{-1} b & - \quad B^{-1} N x_N
\end{array}
$$

1. Ao longo de todo o algoritmo dispomos de uma solução dual viável:
$$\overline{c} \geq 0, \;\; p = c_B^T B^{-1} \gtrless 0$$

2. Quando obtemos uma base $B$ tal que $B^{-1} b \geq 0$ temos viabilidade primal e portanto a solução primal-dual em mãos é ótima para o par primal-dual.

Vamos assumir que $B^{-1}b \ngeq 0$, caso contrário o problema foi resolvido.

1. Então obtenha $l$ tal que $x_{B(l)} < 0$ e considere a linha $l$ do dicionário, chamada linha pivot. Esta linha tem as seguintes entradas: $x_{B(l)}$ e $v_i : i \in N$, onde $v_i$ é a $l$-ésima entrada do vetor $-B^{-1}A_i$ para uma variável não básica $x_i$.
2. Para todo $i \in N : v_i > 0$ (caso tal índice exista), calculamos a razão $\frac{\overline{c}_i}{v_i}$.
3. Seja $j$ o índice da variável não básica para a qual a razão mínima é atingida, isto é, $v_j > 0$ e $\frac{\overline{c}_j}{v_j} = \min\{\frac{\overline{c}_i}{v_i}, \forall i \in N : v_i > 0\}$. A entrada $v_j$ é chamada elemento pivot.
4. Realizamos uma mudança de base: a coluna $A_j$ entra na base e a coluna $A_{B(l)}$ sai da base.

1. Convergência finita: Caso $\overline{c}_j = 0$ para algum índice $j \in N$ (não básico) temos a degeneração dual e o algoritmo possui convergência finita, se não houver ciclagem. Para evitá-la, pode-se empregar a regra de Bland.

2. Problema primal inviável: Dada uma escolha de variável $B(l)$ para sair da base, caso não exista $i : v_i > 0$, o custo dual ótimo é $\infty$ e o problema primal é inviável. O algoritmo então termina.

# Quando usar o Dual Simplex

1. Quando o Problema Dual tiver alguma estrutura desejável. Por exemplo, quando o dual é um Problema de Fluxo em Redes que admite alguma especialização bastante eficiente do Método Simplex.
2. Quando uma base dual viável for prontamente disponível.
3. Isto tipicamente ocorre em situações de re-otimização onde:
   1. Algum elemento de $b$ foi perturbado e a base ótima do programa anterior não é mais primal viável, mas mantém viabilidade dual.
   2. Alguma restrição adicional foi inserida no Problema Primal. Observe que a introdução de uma nova restrição no primal não afeta a viabilidade dual.

**Dicionário Primal: dual viável, primal inviável.**

$$\begin{array}{rrrrrr} (\min) & w = & 0 & +2x_1 & +6x_2 & +10x_3 \\ & x_4 = & 2 & +2x_1 & -4x_2 & -x_3 \\ & x_5 = & -1 & -4x_1 & +2x_2 & +3x_3 \end{array}$$

Operação de pivoteamento:

- Sai da base: $x_5$ uma vez que $(B^{-1}b)_2 < 0$.
- Candidatos a entrar na base $(i \in N : v_i > 0)$: $x_2, x_3$.
- $x_2$ entra na base, uma vez que determina o teste da razão.

# Exemplo

**Dicionário primal resultante, primal-dual viável, Base ótima.**

$$\begin{array}{rcrrrr} w & = & 3 & +14x_1 & +x_3 & +3x_5 \\ x_4 & = & 0 & -6x_1 & +5x_3 & -2x_5 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} & +2x_1 & -\frac{3}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_5 \end{array}$$

- Observe que o custo primal piorou (subiu para 3).

Continuamos considerando que o problema primal (min) está na forma padrão e que as linhas de $A$ são li.

- Dado que temos a base $B$ formada pelas linhas $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$, temos a solução básica $x_B = B^{-1}b$.
- Com a mesma base, podemos resolver o sistema linear $p^T B = c_B^T$. Uma vez que $B$ admite inversa, este sistema tem solução única $p^T = c_B^T B^{-1}$.
- Esta solução dual $p$ é tal que o número de restrições duais justas linearmente independentes é igual à dimensão do espaço dual.
- Por este motivo, a solução $p$ é uma solução básica para o poliedro dual.

## Par primal-dual, primal na forma padrão

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 + x_2 & & \\
 & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\
 & x_1 - x_4 & = & 1 \\
 & x \geq 0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & 2p_1 + p_2 & & \\
 & p_1 + p_2 & \leq & 1 \\
 & 2p_1 & \leq & 1 \\
 & p \geq 0 & &
\end{array}
$$

# Exemplo

## Dicionário inicial: ponto $A$

$$\begin{array}{rcccc} w & = & 0 & +1x_1 & +1x_2 \\ x_3 & = & \text{-}2 & +1x_1 & +2x_2 \\ x_4 & = & \text{-}1 & +1x_1 & \end{array}$$

## 1o. pivot: ponto $B$

$$\begin{array}{rcccc} w & = & 1 & +1/2x_1 & +1/2x_3 \\ x_2 & = & 1 & -1/2x_1 & +1/2x_3 \\ x_4 & = & \text{-}1 & +1x_1 & \end{array}$$

## 2o. pivot: ponto $C$

$$\begin{array}{rcccc} w & = & 3/2 & +1/2x_3 & +1/2x_4 \\ x_2 & = & 1/2 & +1/2x_3 & -1/2x_4 \\ x_1 & = & 1 & & +1x_4 \end{array}$$

posto($A$)$=m$, completo.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Qualquer matriz $B$ inversível associa-se a uma solução dual básica, dada por $p^T = c_B^T B^{-1}$.
- $n$ restrições do dual $p^T A \leq c^T$:
  - $m$ associadas às colunas básicas: $p^T B \leq c_B$.
    Estas $m$ restrições são naturalmente satisfeitas de forma justa dado que $p^T = c_B^T B^{-1}$.
  - $(n-m)$ associadas às colunas não básicas $p^T N \leq c_N$.
    Na base ótima, estas restrições duais são sempre satisfeitas. Algumas delas podem ser satisfeitas de forma justa.

## Degeneração no dual

- Para definir uma solução básica para o poliedro do PPL dual, são necessárias $m$ restrições justas linearmente independentes. Portanto, na degeneração, há mais de $m$ restrições justas na solução básica dada por esta escolha de base: $p^T = c_B^T B^{-1}$.
- Se houver variável não básica $j$ tal que $\overline{c}_j = 0$, isto é, $j : p^T A_j = c_j$, temos degeneração dual.

## Soluções primais ótimas múltiplas

- Para existirem múltiplas soluções primais ótimas é necessário existirem pelo menos duas soluções básicas ótimas distintas.
- Portanto, é necessário existir uma variável não básica $j : \overline{c}_j = 0$.
- A condição acima implica que o problema dual é degenerado.

Atenção: existir $x_j$ não básica tal que $\overline{c}_j = 0$ é uma condição necessária para existência de múltiplas soluções ótimas primais, mas não é suficiente.

## Bases no primal e correspondência no dual

1. Bases diferentes podem levar à soluções idênticas no primal, mas diferentes no dual.
2. Destas bases duais, algumas podem ser duais viáveis, outras inviáveis.

## Exemplo: Bases no primal e correspondência no dual

- Considere as bases $[A_2, A_3], [A_1, A_3], [A_2, A_3]$ no exemplo abaixo.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\max \quad & 2p_1 \\
& p_1 + 2p_2 \leq 3 \\
& p_1 - p_2 \leq 1
\end{aligned}
$$