Problemas bem resolvidos e Fluxo em Redes

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

acunha@dcc.ufmg.br

Outubro 2020

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Relativas à esta apresentação

1. L. Wolsey. Integer Programming, Wiley, 1998. [Cap. 3]
2. D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997. [Cap. 7]
3. R. J. Vanderbei. Linear Programming: Foundations and Extensions, Springer, 4a. Edição, 2014. [Caps. 14 e 15]

Dizemos que um algoritmo para resolver um problema de Otimização Combinatória definido em um grafo $G = (V, E)$ em m arestas e n vértices é eficiente (i.e., o problema é bem resolvido) se, no pior caso, este algoritmo executar não mais de $O(m^p)$ operações elementares (para algum inteiro p, assumindo $m \geq n$).

Propriedades frequentemente satisfeitas por problemas bem resolvidos

Problema de Otimização Combinatória

$$\left\{ \max c^T x : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \right\}$$

1. Propriedade de otimização eficiente sobre X.
2. Existência de um problema dual formando um par primal-dual forte.
3. Propriedade da separação eficiente.
4. Existência de uma descrição compacta explícita para $conv(X)$.

Para uma dada classe de problema de otimização (P) $\{\max c^T x : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$, existe um algoritmo eficiente (polinomial) que o resolva.

Para esta dada classe de problema de otimização, existe um problema dual (D) $\{\min w(u) : u \in U\}$ associado a (P) (P e D formando um par primal-dual forte) que nos permite obter um certificado de otimalidade facilmente verificável:

Verificação de otimalidade

$x^* \in X$ é uma solução ótima para (P) **se e somente se** existe $u^* \in U$ tal que $cx^* = w(u^*)$.

Existe um algoritmo eficiente para resolver o problema de separação associado com ao problema P.

Existe uma descrição linear compacta para $conv(X)$, permitindo resolver o problema (P) através da resolução do PPL:

$$\{\max c^T x : x \in conv(X)\}.$$

Observações sobre algumas conexões entre estas propriedades

1. Se o problema possui a propriedade de descrição compacta da envoltóri convexa, o dual do PPL $\{\max c^T x : x \in conv(X)\}$ sugere que a propriedade de existência do dual forte deve valer.
2. Usando a descrição de $conv(X)$, a mesma observação deve valer para a propriedade de separação eficiente.
3. Vamos estudar algumas classes de problemas para os quais verificamos as quatro propriedades simultaneamente.

1. Dada uma formulação $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ (onde $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$) para um problema de Otimização Inteira ou Combinatória, quando $P = conv(X)$?
2. Isto é, quais as propriedades que, se satisfeitas por A, garantem que qualquer solução ótima da Relaxação Linear associada à P será inteira ?
3. Em outras palavras, quais as propriedades de A que garantem que qualquer vértice de P tenha coordenadas inteiras ?

Matrizes Totalmente Unimodulares

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ de posto completo m é dita unimodular se somente se qualquer base B de A (uma submatriz $m \times m$ não singular de A) possui determinante igual a $+1$ ou -1.

Teorema

Seja A uma matriz inteira de posto completo. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:

1. *A é unimodular.*
2. *Qualquer solução básica para $Ax = b$ é inteira para qualquer b inteiro.*
3. *Toda base B de A admite inversa inteira B^{-1}.*

Prova

- $(1) \rightarrow (2)$

  Considere uma solução básica x_B e sua base associada B, tal que $Bx_B = b$.

  Pela regra de Cramer temos:

$$x_j = \frac{det(Adj(B, j))}{det(B)}, \forall j = 1, \dots, m,$$

  onde a matriz $Adj(B, j) = [B^1, \dots, B^{j-1}, b, B^{j+1} \dots, B^m]$ e $B^i : i \neq j$ são vetores colunas de B. Então $Adj(B, j)$ é uma matriz inteira. Como por hipótese A é unimodular, $det(B)$ só pode assumir valores $+1$ ou -1. Assim sendo, todos os x_j são inteiros.

Prova

- *Como* $\det(B) \neq 0$, B^{-1} *existe.*
- *Seja* $D = B^{-1}$ *e* D^j *a j-ésima coluna de* D*. Defina um vetor inteiro* $\alpha : D^j + \alpha \geq 0$ *e um vetor qualquer* $x := D^j + \alpha$*.*
- *Pré-multiplicando* B *por* x *temos:*

$$Bx = B(D^j + \alpha) = B(B^{-1}e_j + \alpha) = e_j + B\alpha.$$

- *Observe que* $e_j + B\alpha$ *é inteiro, e então a solução do sistema linear* $By = e_j + B\alpha$ *é inteira (hipótese da parte (b) do Teorema). Isto é:* $y = B^{-1}e_j + \alpha$ *é um vetor inteiro.*
- *Entretanto* $y = B^{-1}e_j + \alpha = D^j + \alpha = x$*. Ou seja,* x *é também inteiro e portanto,* D^j *deve ser inteiro já que* α *é inteiro.*

Prova

- *Por hipótese, B é inteira, logo $det(B)$ é inteiro.*
- *Pela condição (3), a base B de A admite inversa B^{-1} inteira. Assim sendo, $det(B^{-1})$ é inteiro.*
- *Como $BB^{-1} = I$, temos $det(B)det(B^{-1}) = 1$.*
- *Como estes dois determinantes necessariamente são inteiros, temos*

$$det(B) = det(B^{-1}) = +1$$

ou

$$det(B) = det(B^{-1}) = -1.$$

$\square$

Definição

Uma matriz A é totalmente unimodular se toda submatriz B de (quadrada de qualquer ordem) de A é tal que $det(B) \in \{0, +1, -1\}$.

Observação

As matrizes TUM são um caso particular das matrizes unimodulares. Toda matriz TUM de posto completo é também unimodular uma vez que toda base B de A deve ter determinante igual a ∓ 1.

Condição necessária

Se A é TUM então $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ para qualquer par i, j

Teorema

A matriz A é TU se e somente e:

1. *A transposta A^T de A é TUM, e, se somente se*
2. *A matriz A expandida pela indentidade I (de ordem m): (A, I) é TUM.*

Uma condição suficiente para A ser TUM

Teorema

A matriz A é TUM se:

1. $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}, \forall i, j$
2. *Toda coluna de A possui no máximo dois elementos distintos de* 0*, isto é:* $\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \leq 2$
3. *Existe uma partição* (M_1, M_2) *da conjunto de linhas M de A* $(M_1 \cap M_2 = \emptyset, M_1 \cup M_2 = M)$ *tal que toda coluna j contendo exatos* 2 *elementos não nulos satisfaz* $\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0.$

Prova

Por contradição. Vamos assumir que A não seja TUM, mas satisfaça as condições do Teorema.

- *Se A não é TUM, então existe submatriz quadrada de A com determinante diferente de* $\mp 1, 0$. *Seja B a menor destas submatrizes. B não pode conter uma coluna de zeros (já que* $det(B) \neq 0$*) nem uma linha contendo apenas uma entrada não nula, caso contrário B não seria minimal. Logo toda coluna de B possui exatamente duas entradas não nulas.*
- *Seja* M_B *o conjunto de índice das linhas de A que estão em B. Pela terceira condição do Teorema:* $\sum_{i \in M_1 \cap M_B} a_{ij} - \sum_{i \in M_2 \cap M_B} a_{ij} = 0$. *Logo, B possui linhas linearmente dependentes e* $det(B) = 0$.

Teorema

Assuma que a Relaxação Linear do IP $\{max\ c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$ *seja limitada. Ela resolve o IP para qualquer* $b \in \mathbb{Z}^m$ *(para o qual assume um valor finito) se e somente se* A *é TUM.*

Comentários

Mostramos que para o (IP) max $\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$ onde A é TUM:

- O dual da Relaxação Linear de (IP) e (IP) formam um par primal-dual forte.
- A envoltória convexa do conjunto de soluções de IP é conhecida: $conv(X) = \{Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$.
- A propriedade de separação eficiente em $conv(X)$ é verificada.

O Problema de Fluxo de custo mínimo em uma rede (PFCM)

Considere um digrado $D = (V, A)$ onde:

- os arcos possuem capacidades h_{ij}, $\forall (i, j) \in A$
- os vértices $i \in V$ possuem demandas b_i (positivas, indicando disponbilidade de oferta de produto; negativas, indicando falta) de um certo produto que será transportado através da rede.
- a cada arco $(i, j) \in A$ associa-se um custo unitário c_{ij} de transporte do produto de i para j.

Deseja-se encontrar um fluxo viável de mínimo custo. Para tanto, vamos assumir que $\sum_{i \in V} b_i = 0$, caso contrário o problema não admite solução viável.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = b_i, \ \ \forall i \in V, \tag{2}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}, \ \ \forall (i,j) \in A. \tag{3}$$

onde $V^+(i) = \{k \in V : (i,k) \in A\}, V^-(i) = \{k \in V : (k,i) \in A\}$.

Teorema

A matriz de coeficientes A associada às restrições (2)-(3) é TUM.

Prova

A matriz A *é da forma* $[D^T \; I_m \; -I_m]^T$. *Portanto, basta provar que* D *é TUM.*
Observe que D *satisfaz às condições suficientes apontadas no Teorema anterior:*

- $d_{ij} \in \{0, +1, -1\}$
- $\sum_{i=1}^{m} |d_{ij}| \leq 2, \forall j = 1, \ldots, m$
- *Todas as colunas possuem exatos dois elementos não nulos. Então faça* $M_1 = M$ *e* $M_2 = \emptyset$ *e verifique que* $\sum_{i \in M_1} d_{ij} - \sum_{i \in M_2} d_{ij} = 0, \forall j = 1, \ldots, m.$ $\square$

1. Cada ponto extremo de (2)-(3) é uma solução básica inteira.
2. As restrições (2)-(3) definem a envoltória convexa dos vetores de fluxo viáveis associadas ao digrafo D.
3. Quas são os raios extremos associados ?

Problemas de Fluxo de Custo Mínimo particulares

1. Caminho mais curto entre $s \in V$ e $t \in V$.
2. O Problema de Fluxo Máximo entre s e t.

- Dados de entrada: $D = (V, A)$, vértice de origem s e destino t, custo de percorrer os arcos $\{c_{ij} : (i,j) \in A\}$.
- Pode ser visto como o problema de enviar uma unidade de fluxo de s a t, isto é $b_i = 0, i \notin \{s,t\}$, $b_s = 1, b_t = -1$.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = 1, i = s,$$

$$\sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = 0, i \in V \setminus \{s,t\},$$

$$\sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = -1, i = t,$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ \forall (i,j) \in A$$

$$x \in \mathbb{Z}^{|A|}$$

- Dados de entrada: $D = (V, A)$, vértice de origem s e destino t, capacidades impostas ao fluxo que pode passar nos arcos $\{h_{ij} : (i, j) \in A\}$.
- Qual a máxima quantidade de fluxo que pode ser enviada de s a t ?
- Inserimos o arco (x, t) em D e impomos demandas nulas $b_i = 0, \forall i \in V$.

$$\max x_{ts}$$

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = 0, \forall i \in V.$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}, \ \ \forall (i, j) \in A.$$