Geometria da Programação Linear

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

acunha@dcc.ufmg.br

Julho 2020

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

Algumas referências bibliográficas

Relativas a esta apresentação

1. D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997. [Seções:1.1, 1.4, 2.1 a 2.6]

1. Definir a notação a ser empregada.
2. Ilustrar diferentes formas de se apresentar PPLs.
3. Ilustrar a resolução gráfica de um PPL.
4. Definir vértice, ponto extremo e solução básica viável de um poliedro.
5. Definir raios extremos de um poliedro.
6. Mostrar que um PPL que admite solução ótima, admite uma que está em um de seus vértices.
7. Estabelecer as bases para apresentar o Método Simplex.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P \end{aligned}$$

Algumas definições:

1. Função objetivo: $f(x) = c^T x$, função a ser minimizada (ou maximizada).
2. Região de viabilidade: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$.
3. P é um poliedro: interseção de um número finito de semi-espaços e/ou hiperplanos. Um politopo é um poliedro limitado.
4. Poliedro na forma padrão: $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.
5. PPL inviável: região de viabilidade vazia, $P = \emptyset$
6. Solução ótima do PPL: $x^* \in P$ tal que $c^T x^* \leq c^T x$ para qualquer $x \in P$.
7. PPL ilimitado: dado qualquer $x \in P$, existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x + \alpha d) \in P$ para qualquer $\alpha > 0$ e $c^T d < 0$.

Forma geral

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&a_i^T x \geq b_i \qquad && i \in M_1 \\
&a_i^T x \leq b_i. \qquad && i \in M_2 \\
&a_i^T x = b_i \qquad && i \in M_3
\end{aligned}
$$

Forma padrão

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&a_i^T x = b_i \qquad && i \in M \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Para transformar um problema da forma geral para a forma padrão:

- Eliminação de variáveis livres. Se x_j é irrestrita em sinal, substitua x_j pela diferença entre duas (novas) variáveis não negativas: $x_j = x_j^+ - x_j^-$. Adicione as restrições $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$.
- Eliminação de restrições de desigualdades (exceto as de não negatividade). Para uma restrição $a_i^T x \leq b_i$, introduza uma nova variável de folga s_i, a restrição $s_i \geq 0$ e re-escreva a restrição como $a_i^T x + s_i = b_i$. Se a restrição for $a_i^T x \leq b_i$, reescreva como $a_i^T x - s_i = b_i$.

PPL com uma solução ótima

$$
\begin{aligned}
\min\; & -x_1 - x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

PPL com múltiplas com soluções ótimas

$$
\begin{aligned}
\min -x_1 - 2x_2 \\
x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
2x_1 + x_2 \leq 3 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

PPL ilimitado

$$\min x_1 + x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

1. $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se e somente se para quaisquer $x, y \in C, x \neq y$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in C$ para qualquer $\lambda \in [0,1]$.
2. O ponto z é chamado de combinação convexa de x, y, com pesos λ, $1-\lambda$.
3. Generalizando: z é uma combinação convexa dos pontos $\{x^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, p\}$, se $z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i$ para pesos $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, p$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.
4. Um poliedro é um conjunto convexo.

z é uma combinação cônica de $\{x^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, p\}$, se

$$z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i$$

para pesos

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, p.$$

1. O método gráfico *sugere* que uma solução ótima de um PPL *ocorre* em um *canto* (tradução livre de *corner*, termo que será melhor definido posteriormente) do poliedro que define a região de viabilidade do PL.

2. Isto de fato é verdade, desde que P possua pelo menos um *canto*.

3. Vamos apresentar três formas distintas de definir o que venha a ser um *canto* do poliedro.
   - Argumentos geométricos: pontos extremos e vértices de um poliedro.
   - Argumentos algébricos: soluções básicas (e básicas viáveis) de um poliedro.

Definição

Seja P um poliedro.

- Um ponto $x \in P$ é um ponto extremo de P se não for possível escrever x como uma combinação linear convexa de dois pontos $z, y \in P$ (distintos de x).
- Isto é, não existem $z, y \in P, z, y \neq x$ e $\lambda \in [0, 1]$ tal que $x = \lambda z + (1 - \lambda)y$.

Definição

Seja P um poliedro.

- Um ponto $x \in P$ é um vértice de P se existe algum vetor de custos $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^T x < c^T y$ para qualquer $y \in P, y \neq x$.
- Isto é, x é um vértice do poliedro se

$$\{y \in \mathbb{R}^n : c^T y = c^T x\} \cap P = \{x\}.$$

Desvantagens das caracterizações geométricas anteriores

1. Não são fáceis de serem tratadas por um algoritmo.
2. Seria desejável dispor de uma descrição de *canto* que dependesse da representação do poliedro em termos de restrições lineares que pudesse ser resumido a um teste algébrico.

- Vamos assumir que P seja definido pelas seguintes restrições lineares, na forma de igualdade e de desigualdade:
  $a_i^T x \geq b_i, \forall i \in M_1, a_i^T x \leq b_i, \forall i \in M_2, a_i^T x = b_i, \forall i \in M_3.$

- Então se um ponto x^* satisfaz $a_i^T x^* = b_i$ para algum $i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$, dizemos que a restrição i é ativa para x^*.

- Se x^* é viável, toda restrição de igualdade é ativa para x^*.

- Se existem n restrições ativas em x^*, então x^* satisfaz um sistema linear de n restrições em n variáveis.
- Este sistema linear admite solução única se os vetores a_i que definem estas n restrições ativas são *linearmente independentes.*

Proposição

Dado $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $I = \{i : a_i^T x^* = b_i\}$ o conjunto dos índices das restrições ativas em x^*. Então, são equivalentes as afirmativas:

1. *Existem n vetores no conjunto $\{a_i : i \in I\}$ que são l.i.*
2. $span(\{a_i : i \in I\}) = \mathbb{R}^n$
3. *O sistema linear $a_i^T x = b_i, \forall i \in I$ possui solução única.*

Definição

Dado um poliedro P definido por m restrições lineares e $x^* \in \mathbb{R}^n$ $(m \geq n)$.

1. O ponto x^* é uma solução básica se:
   1. Todas as restrições de igualdade que definem P são ativas para x^*.
   2. Dentre todas as restrições que são ativas em x^* (de igualdade inclusas), existem n cujos a_i's são linearmente independentes.
2. Se x^* é uma solução básica e todas as restrições que definem P são satisfeitas, isto é, $x^* \in P$, então x^* é uma solução básica viável.

Quais são as soluções básicas de $P = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$?
E para $P' = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$?

$m < n$: não existem soluções básicas

- Neste caso, o número de restrições ativas é sempre inferior a n.
- Consequentemente, não existem soluções básicas ou básicas viáveis.

Exemplo: $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$.

1. Dois poliedros P e P' tais que $P = P'$, definidos por representações distintas de restrições lineares podem possuir conjunto de soluções básicas distintas.
2. O modo como o poliedro é representado em termos de restrições lineares influencia o conjunto de soluções básicas.

As três formas de representação são equivalentes

Teorema

Seja P um poliedro não vazio e $x^* \in P$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:

1. x^* *é um ponto extremo;*
2. x^* *é um vértice;*
3. x^* *é uma solução básica viável.*

Consequências

- O número de soluções básicas é finito.
- Uma vez que uma solução básica viável é um ponto extremo e como a definição de ponto extremo não é dependente da forma de representar o poliedro, a propriedade de ser uma solução básica viável é independente da representação, que contrasta com o caso da solução básica não viável. Em suma: ser ou não solução básica depende da representação, mas ser solução básica viável não depende.

- Duas soluções básicas para um conjunto de m restrições lineares em $\mathbb{R}^n$ são adjacentes se existem $(n-1)$ restrições cujos a_i's são linearmente independentes e que são ativas nas duas soluções.
- Se duas soluções básicas adjacentes são também viáveis, o segmento de reta que as une é chamado aresta do poliedro.

- Até o momento, a definição de solução básica foi dada para um poliedro descrito de forma geral.

- Vamos especializar esta definição para a forma padrão, do tipo $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

- A especialização será fundamental para o desenvolvimento do Método Simplex.

Consideramos $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Vamos assumir que as m linhas de A são linearmente independentes.
2. Como as linhas de A são n dimensionais, temos $m \leq n$.
3. Futuramente, mostraremos que se houver dependência linear entre as m linhas, as linhas que não adicionam posto a A podem ser eliminadas, sem alterar a região de viabilidade (isto é, estas linhas são redundantes para definir P).

Pela definição anteriormente apresentada, uma solução básica $\hat{x}$ para $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ deve ser tal que:

1. $A\hat{x} = b$, i.e., as restrições de igualdade são ativas (satisfeitas).
2. Como os m vetores $\{a_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ que definem A são l.i., para que $\hat{x}$ seja uma solução básica, é necessário que dentre as n restrições de não negatividade, existam $n - m$ ativas em $\hat{x}$.
3. As restrições de não negatividade ativas em $\hat{x}$ não podem ser quaisquer $(n - m)$ das n disponíveis, pois dependendo da escolha de quais são ativas e quais são folgadas, o conjunto de n restrições ativas resultantes pode não ser l.i.

Teorema

Considere as restrições $Ax = b$ *e* $x \geq 0$ *e assuma que a matriz* A, $m \times n$, *possua* m *linhas linearmente independentes.*

Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ *é uma solução básica se e somente se* $Ax = b$ *e existirem índices* $B(1), \ldots, B(m)$ *de colunas de* A *tais que:*

1. *As colunas* $A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}$ *são linearmente independentes;*
2. *Se* $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ *então* $x_i = 0$.

Prova

- *Considere* $x \in \mathbb{R}^n$ *e assuma que existam índices* $B(1), \ldots, B(m)$ *satisfazendo (1) e (2) acima.*
- *As restrições ativas* $x_i = 0$ *para os índices* $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$, *em conjunto com* $Ax = b$, *garante que* $\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = Ax = b$.
- *Como as colunas* $B(1), \ldots, B(m)$ *são l.i., o sistema linear formado pelas restrições ativas possui solução única.*
- *Ou seja, existem n restrições ativas linearmente independentes, e então x é uma solução básica (segundo a equivalência das definições anteriores).*

Prova

- *Assuma que x é uma sol. básica. Vamos mostrar que (1) e (2) são então satisfeitas.*
- *Seja* $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ *as componentes de x que são não nulas.*
- *Uma vez que x é básica, o sistema de restrições ativas formado por* $Ax = b$ *e* $x_i = 0, i \notin \{B(1), \ldots, B(k)\}$ *admite sol. única. Equivalentemente o sistema* $\sum_{i=1}^{k} A_{B(i)} x_i = b$ *admite solução única.*
- *Ou seja, as colunas* $B(1), \ldots, B(k)$ *são li e então* $k \leq m$.

Até agora, mostramos que $B(1), \ldots, B(k)$ são l.i. e $k \leq m$.

Prova

- *Uma vez que o posto de A é m, A possui m linhas e colunas li.*
- *Então é possível escolher outras $m - k$ colunas $B(k+1), \ldots, B(m)$ de A, de forma que as colunas $B(1), \ldots, B(m)$ sejam li.*
- *Observe então que se $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ então $i \notin \{B(1), \ldots, B(k)\}$ e então $x_i = 0, \forall i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$, completando a prova.*

1. Escolha m colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ linearmente independentes de A.
2. Faça $x_i = 0, \forall i \notin \{B(1), B(2), \ldots, B(m)\}$.
3. Resolva o sistema linear de m restrições $Ax = b$ para as variáveis $x_{B(1)}, x_{B(2)}, \ldots, x_{B(m)}$.

A solução dada por

$$\{x_{B(i)} : i = 1, \ldots, m\} \text{ e } \{x_j = 0, j \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}\}$$

é básica. Caso

$$x_{B(i)} \geq 0 : i = 1, \ldots, m$$

a solução encontrada é básica e viável.

- As colunas $B(1), \ldots, B(m)$ são denominadas básicas, assim como as variáveis de decisão a elas associadas.
- As demais colunas (e variáveis) são denominadas não básicas.
- A matriz B $(m \times m)$ formada pelas colunas básicas, $B = [A_{B(1)} \;\; A_{B(2)} \;\; \cdots \;\; A_{B(m)}]$, é chamada base.
- As variáveis básicas x_B são obtidas resolvendo-se o sistema linear: $Bx_B = b$.
- Se $x_B \geq 0$, x é uma solução básica viável.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. Se escolhermos A_4, A_5, A_6, A_7 como colunas básicas, temos que B é não singular e $x_B = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6) \geq 0$ é uma solução básica viável.

2. Outra base pode ser obtida escolhendo-se como básicas as colunas A_3, A_5, A_6, A_7. A matriz B resultante é não singular e a solução básica $x_B = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6) \not\geq 0$ é não viável.

- Se para x vale $Ax = b \iff b = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$, é possível escrever $b \in \mathbb{R}^m$ como uma combinação linear das colunas de A.
- Uma solução básica permite sintetizar b usando-se apenas m colunas, isto é, $b = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)}$.
- Em uma solução básica viável, os pesos na combinação linear, x_B, são não negativos.

- Diferentes soluções básicas precisam corresponder a diferentes bases, uma vez que uma base determina unicamente uma solução básica.
- Entretanto, bases diferentes podem levar à mesma solução básica, mesmo ponto do $\mathbb{R}^n$.
- Este fenômeno (chamado degeneração) possui consequências computacionais muito importantes.

Da mesma forma que definimos soluções básicas adjacentes como aquelas em que compartilham $n - 1$ restrições l.i. ativas, definimos bases adjacentes como submatrizes de A que compartilham $m - 1$ colunas (isto é, que diferem apenas por uma coluna).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ são bases adjacentes.
- As correspondentes soluções básicas $(0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)$ e $(0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ são adjacentes uma vez que $n = 7$ e temos que as restrições $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ em conjunto com as restrições de igualdade forma um sistema de 6 restrições justas l.i.

Considere o politopo P dado pelas restrições:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_2 + 6x_3 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $x = (2, 6, 0)^T$ é básica não degenerada, uma vez que há exatamente três restrições ativas no ponto (são justas: $x_3 = 0,\ x_2 \leq 6,\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$)
- $x = (4, 0, 2)^T$ é uma solução básica degenerada (são justas: $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8,\ x_2 + 6x_3 \leq 12,\ x_1 \leq 4,\ x_2 \geq 0$).

Degeneração: graficamente

Definição

Considere o poliedro na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Assuma que x seja uma solução básica e que m seja o número de linhas de A (todas l.i.). A solução básica (viável ou não) x é degenerada se mais de $n - m$ componentes do vetor x são nulas.

Consideremos o poliedro do exemplo anterior, após introdução de variáveis de folga.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Vamos considerar a solução básica associada às colunas A_1, A_2, A_3, A_7.
- Fixando $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ e resolvendo linear $Bx_B = b$, temos que $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$ que é uma solução básica (viável) degenerada, uma vez que $x_2 = 0$ é uma variável básica em 0.
- Consequentemente, temos 4 variáveis no nível zero e não 3 apenas ($n - m = 7 - 4 = 3$).

1. Escolhemos uma solução básica selecionando n restrições linearmente independentes para serem satisfeitas na igualdade. Percebemos em seguida que outras restrições, além das n que selecionamos, são também justas na solução básica que resulta de resolver o sistema linear (na igualdade).
2. Se as entradas de A e b forem escolhidas aleatoriamente, a chance das soluções básicas decorrentes serem degeneradas é muito pequena.
3. Em muitas aplicações (onde A e b possui estrutura, por exemplo estrutura de rede), a degeneração é bastante comum.

A degeneração não é independente do modo como representamos o poliedro. Ela depende de como formulamos o PPL.

Considere o poliedro P representado de duas formas:

- $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ e
- $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0\}$.

O ponto $x = (0\ 0\ 1)^T$ é degenerado diante da primeira representação, e não degenerado diante da segunda.

- Considere uma solução x^* básica viável **não degenerada** para um poliedro na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Temos então exatamente $n - m$ variáveis satisfazendo $x_i^* = 0$.
- Se re-escrevermos o poliedro da seguinte forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b, -Ax \geq -b, \; x \geq 0\}$ temos exatamente as mesmas $n - m$ variáveis satisfazendo $x_i^* = 0$ e mais $2m$ restrições justas em x^* (totalizando $n + m$ justas). Portanto, para esta nova representação, x^* é uma solução básica viável degenerada.

Definição

- Uma solução básica $x \in \mathbb{R}^n$ é chamada degenerada se mais de n restrições são ativas em x.
- Isto significa que diferentes bases (matrizes compostas por diferentes conjuntos de m colunas l.i.) de A são associadas à mesma solução básica x.

É uma hipótese pouco restritiva.

Teorema

Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ *um poliedro não vazio, onde* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *possui linhas* $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_m^T$.

Assuma que o posto de A *seja* $k < m$ *e que as primeiras* k *linhas de* A, $a_1^T, \ldots, a_k^T$, *sejam l.i.*

Então o poliedro

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i, \;\; i = 1, \ldots, k, \;\; x \geq 0\}$$

e P *são idênticos e não há perda de generalidade na hipótese de posto completo de* A.

Prova

- *Observe que se as primeiras k linhas não forem l.i. podemos rearranjar a ordem das linhas de forma que isto aconteça.*
- *Claramente $P \subset Q$.*
- *Basta mostrar que $Q \subset P$ para mostrar que $P = Q$.*
- *Se o posto de A é k, então o espaço linha de A possui dimensão k e qualquer outra linha de A, digamos a linha a_i, pode ser escrita como combinação linear destas k linhas, isto é, $a_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j$ para escalares λ_{ij}.*
- *Considere $x \in P$. Observe que $a_i^T x = b_i, \;\; i = 1, \ldots, m$. Logo $b_i = a_i^T x = (\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j^T) x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j$.*
- *Tome agora $y \in Q$. Então para qualquer i : $a_i^T y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j^T y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i$. Logo $y \in P$ e $Q \subset P$.*

- Nem todo poliedro possui um ponto extremo. Exemplo: um semiespaço em $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ não possui ponto extremo.
- O poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $m < n$ não possui ponto extremo.
- Vamos obter uma condição suficiente para um poliedro possuir um ponto extremo.

Definição

Um poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ possui **uma linha** se existir um vetor $x \in P$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ não nula tal que $x + \lambda d \in P$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema

Suponha que o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ *é não vazio. Então, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. *O poliedro P possui pelo menos um ponto extremo.*
2. *O poliedro P não possui uma linha.*
3. *Dentre os vetores $\{a_i : i = 1, \ldots, m\}$, existem n linearmente independentes.*

Prova

(2) → (1)

- *Seja* $x \in P$ *e* $I = \{i = 1, \dots, m : a_i^T x = b_i\}$ *o conjunto das restrições ativas em* x. *Se* n *dos vetores em* I *são l.i. nada temos a provar (*x *seria, por definição uma soluçao básica). Então assumimos não ser este o caso.*
- *Então os vetores em* I *formam um subespaço próprio de* $\mathbb{R}^n$, *existindo portanto* $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tal que* $a_i^T d = 0, i \in I$.
- *Consideremos os pontos da forma* $y = x + \lambda d$. *Para todo* $i \in I$, *temos* $a_i^T y = a_i^T x + \lambda a_i^T d = a_i^T x = b_i$.
- *Como não há uma linha e como ao longo de* d *todas as restrições em* I *permanecem ativas, há um valor para* λ, *digamos* λ^*, *para o qual uma nova restrição se torna justa. Isto é, existe* $\lambda^* : a_j^T (x + \lambda^* d) = b_j, j \notin I$.

Prova

(2) → (1) - Continuação

- *Afirmamos que a_j não é uma combinação linear dos vetores $a_i : i \in I$. Isto porque $a_j^T x \neq b_j$ e $a_j^T(x + \lambda d) = b_j$. Logo $a_j^T d \neq 0$.*
- *Recorde que $d \perp span(\{a_i : i \in I\})$, logo $a_i' d = 0$.*
- *Uma vez que a_j não é ortogonal a d e $a_i : i \in I$ são ortogonais a d, a_j não pode ser uma combinação linear dos vetores $a_i : i \in I$.*
- *Logo, o número de restrições l.i. aumentou em uma unidade ao movermos de x para $x + \lambda^* d$.*
- *Repetindo o processo quantas vezes forem necessárias, terminamos em um ponto em que o número de restrições ativas l.i. é n e, por definição, este ponto é uma solução básica.*

Prova

(1) $\rightarrow$ *(3)*

- *Se* P *possui um ponto extremo* x*, então* x *é uma solução básica viável.*
- *Por definição, existem para* x*,* n *restrições ativas em* x *cujos vetores* a_i *são l.i.*

Prova

(3) $\to$ (2)

- *Assuma que n dos vetores a_i, digamos, $a_1, \ldots, a_n$, sejam l.i.*
- *Suponha que P contenha uma linha $x + \lambda d$, onde d é um vetor não nulo.*
- *Então temos $a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i, \forall i, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Para que isto ocorra, $a_i^T d = 0$ (se $a_i^T d < 0$, tomaríamos λ suficientemente grande e violariamos a restrição. Raciocínio análogo vale se $a_i^T d > 0$.)*
- *Entretanto, como os vetores $a_1, \ldots, a_n$ são l.i., temos que $d = 0$.*
- *Logo, temos uma contradição e P não pode conter uma linha.*

Teorema

Considere o PPL

$$\min c^T x : x \in P,$$

onde P é um poliedro que possui pelo menos um ponto extremo.

1. *Se o PPL admite um minimizador (não é ilimitado), existe uma solução ótima do PPL que é um ponto extremo de P.*
2. *Ou o custo ótimo é $-\infty$ e o problema é ilimitado ou existe um ponto extremo de P que é ótimo.*

Ideia central do Algoritmo Simplex para resolver PPLs

Vamos conceber um algoritmo para resolver PPLs que:

1. Restringe a pesquisa do ótimo ao conjunto de soluções básicas viáveis do conjunto de viabilidade (poliedro representado na forma padrão).
2. Pesquisa apenas as soluções básicas viáveis do problema, movendo de uma solução básica viável para outra básica viável vizinha.
3. Como o número de soluções básicas viáveis distintas é finito, este algoritmo deve terminar ou concluir que o problema é ilimitado inferiormente.

A beleza do Algoritmo Simplex: A representação algébrica muito conveniente para soluções básicas.