Análise de Sensibilidade

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

acunha@dcc.ufmg.br

Agosto 2020

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

Referências bibliográficas

Relativas à esta apresentação

1. D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997. [Seção 5.1]

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & p^T b \\ & p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Objetivo

Avaliar o impacto de

- Adição e remoção de uma nova variável,
- Adição e remoção de uma restrição,
- Modificações nos vetores b, c,
- Modificações em colunas básicas e não básicas A_j,

nas soluções ótimas x^*, p^* do par primal-dual, sem resolver o PPL *do zero*.

Vamos supor que uma nova variável x_{n+1} com custo c_{n+1} e coluna tecnológica A_{n+1} seja inserida no PPL.

- A introdução de nova variável não altera a viabilidade da solução disponível: $(x^*,\ 0)$ é solução básica viável para o novo PPL.
- A introdução de x_{n+1} pode afetar a viabilidade da solução dual.

Condição a verificar

A solução básica x^* permanece ótima se

$$\overline{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^T B^{-1} A_{n+1} \geq 0.$$

Caso $\overline{c}_{n+1} < 0$, a base B associada a x^* é uma base inicial avançada para o Método Simplex.

Problema Original

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - x_2 + 12x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1 \dots x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Dicionário ótimo, $x^* = (2, 2, 0, 0)$

$$\begin{array}{rrrr} w = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\ x_1 = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\ x_2 = & 2 & -5x_3 & +3x_4 \end{array}$$

Dicionário expandido pela introdução de x_5: $c_5 = -1, A_5 = (1 \quad 1)^T$

Observe que B^{-1} é o simétrico das duas últimas colunas do dicionário ótimo, pois $A_3 = e_1, A_4 = e_2$.

$$\begin{array}{rrrrr} w = & -12 & +2x_3 & +7x_4 & -4x_5 \\ x_1 = & 2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 \\ x_2 = & 2 & -5x_3 & +3x_4 & -2x_5 \end{array}$$

Entrada de x_5 e saída de x_2, temos:

Dicionário original

$$
\begin{array}{rcrrrr}
w & = & -12 & +2x_3 & +7x_4 & \color{red}{-4x_5} \\
x_1 & = & 2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 \\
\color{red}{x_2} & \color{red}{=} & 2 & -5x_3 & +3x_4 & -2x_5
\end{array}
$$

Dicionário resultante

$$
\begin{array}{rcrrrr}
w & = & -16 & +2x_2 & +12x_3 & +x_4 \\
x_1 & = & 3 & -0.5x_2 & +0.5x_3 & -0.5x_4 \\
x_5 & = & 1 & -0.5x_2 & -2.5x_3 & +1.5x_4
\end{array}
$$

A restrição $a_{m+1}^T x \geq b_{m+1}$ é inserida no PPL.

1. Introduzimos a folga x_{n+1} que será básica para o novo PPL. Reescrevemos a restrição $a_{m+1}^T x - x_{n+1} = b_{m+1}$ e definimos $\overline{P} = \{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \overline{A}x = \overline{b}\}$ onde:
$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ a_{m+1}^T & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$
2. A base associada ao novo programa é $\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a^T & -1 \end{bmatrix}$, onde B é a base ótima anterior, a^T contém as m entradas de a_{m+1}^T relativas às colunas de B. Não é difícil verificar que
$$\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ a^T B^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$
3. O novo vetor de custos reduzidos é dado por
$$\overline{c}^T = \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ a^T B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ a_{m+1}^T & -1 \end{bmatrix} =$$
$\begin{bmatrix} (c^T - c_B^T B^{-1} A) & 0 \end{bmatrix} \geq 0$, logo $\overline{B}$ é dual viável.

Exemplo: Introdução de uma desigualdade.

Introduzindo a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$ no PPL do exemplo anterior:

Problema Original

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - x_2 + 12x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1 \dots x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Dicionário ótimo, $x^* = (2, 2, 0, 0)$

$$\begin{array}{rcrrr} w & = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\ x_1 & = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\ x_2 & = & 2 & -5x_3 & +3x_4 \end{array}$$

Dicionário dual viável, de partida para o Dual Simplex

$$\begin{array}{rcrrr} w & = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\ x_1 & = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\ x_2 & = & 2 & -5x_3 & +3x_4 \\ x_5 & = & -1 & -2x_3 & +x_4 \end{array}$$

Dicionário dual viável, de partida para o Dual Simplex

$$\begin{array}{rrrr} w = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\ x_1 = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\ x_2 = & 2 & -5x_3 & +3x_4 \\ x_5 = & -1 & -2x_3 & +x_4 \end{array}$$

Sai da base: x_5, entra na base: x_4

Dicionário final resultante

$$\begin{array}{rrrr} w = & -5 & +16x_3 & +7x_5 \\ x_1 = & 0 & -x_3 & -2x_5 \\ x_2 = & 5 & +x_3 & +3x_5 \\ x_4 = & 1 & +2x_3 & +x_5 \end{array}$$

Introdução de restrição de igualdade

Adicionamos a restrição $a_{m+1}^T x = b_{m+1}$ (violada por x^*).

Novo dual

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T b + p_{m+1} b_{m+1} \\ & p^T A + p_{m+1} a_{m+1} \leq c^T \end{aligned}$$

- Se p^* denota a solução básica ótima do dual anterior, $(p^*, 0)$ é uma solução viável para o novo dual.
- Sendo p^* básica, m das restrições duais $p^T A \leq c^T$ são linearmente independentes e ativas.
- Entretanto, para o novo ponto dual $(p^*, 0)$, não temos a garantia de que $m + 1$ restrições duais li dentre as n restrições $p^T A + p_{m+1} a_{m+1} \leq c^T$ serão justas.
- Assim sendo, não podemos garantir que $(p^*, 0)$ é uma solução básica para o novo poliedro dual.

Assumimos que $a_{m+1}^T x^* > b_{m+1}$, que M é uma constante grande o suficiente e introduzimos o PPL auxiliar:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + M x_{n+1} \\ & Ax = b \\ & a_{m+1}^T x - x_{n+1} = b_{m+1} \\ & x \geq 0, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

- Uma base inicial viável para o PPL auxiliar é obtida usando-se as colunas básicas que definem x^* e a coluna associada a x_{n+1}. A base $\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a^T & -1 \end{bmatrix}$ é viável para o PPL auxiliar.
- Por este motivo, reotimizamos com o Simplex Primal, partindo da base viável $\overline{B}$ para o PPL auxiliar.
- Se M for suficientemente grande e o novo PPL for factível, teremos $x_{n+1} = 0$ na nova solução ótima, após reotimização.

Modificações no vetor de fatores b

Avaliar as modificações produzidas ao modificar b para $b + \delta e_i$

- Se $B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$, a otimalidade da solução básica anterior é garantida (viabilidade dual foi preservada).

Avaliando condições para $B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$

- Seja $g = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots, \beta_{mi})^T$ a i-ésima coluna de B^{-1}.
- Então $B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$ implica que:

$$x_B + \delta g \geq 0 \qquad \text{ou}$$

$$x_{B(j)} + \delta \beta_{ji} \geq 0 \;\; j = 1, \ldots, m.$$

- Equivalentemente:
  - $\delta \geq -\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}$, se $\beta_{ji} > 0$
  - $\delta \leq -\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}$, se $\beta_{ji} < 0$

Modificar b_1 para $b_1 + \delta$, considerando o dicionário ótimo do exemplo:

Dicionário ótimo, $x^* = (2, 2, 0, 0)$

$$
\begin{array}{rcrrr}
w & = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\
x_1 & = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\
x_2 & = & 2 & -5x_3 & +3x_4
\end{array}
$$

$\delta \in [-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}]$ preserva a viabilidade da base

Observe que $g = (-3 \;\; 5)^T$ e então temos:

- $x_1 = 2 - 3\delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{2}{3}$.
- $x_2 = 2 + 5\delta \geq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{2}{5}$
- A taxa de variação da função objetivo por unidade de acréscimo de b_1 é: $c_B^T B^{-1} e_1 = (-5, -1) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 10$

Para δ fora deste intervalo, a base é primal inviável, mas permanece dual viável. Aplicamos o método Dual Simplex, neste caso.

Modificar o custo de uma variável não básica x_j de c_j para $c_j + \delta$:

- Não afeta a viabilidade primal, apenas a viabilidade dual (e, por consequência, a otimalidade primal).
- Se $c_j + \delta - c_B^T B^{-1} A_j \geq 0$ ou seja se $\delta \geq -\overline{c}_j$ a base continua ótima.
- Caso a alteração implique em perda de otimalidade da base, aplicamos o Primal Simplex, introduzindo a variável x_j na nova base.

Modificações no custo de uma variável básica

Modificar o custo de uma variável **básica** x_j de c_j para $c_j + \delta$.

- Vamos assumir que j seja a variável básica associada à $l-$ésima linha do dicionário, isto é $j = B(l)$ e então $c_B = c_B + \delta e_l$.
- Devemos garantir que $(c_B + \delta e_l)^T B^{-1} A_i \leq c_i, \forall i \neq j$, uma vez que todos os custos reduzidos, exceto $\overline{c}_j$ são afetados pela modificação.
- Definindo q_{li} como a l-ésima entrada do vetor $B^{-1}A_i$ temos que $\delta q_{li} \leq \overline{c}_i, \forall i \neq j$.

Exemplo - modificações nos custos

Dicionário ótimo, $x^* = (2, 2, 0, 0)$

$$\begin{array}{rrrr} w = & -12 & +2x_3 & +7x_4 \\ x_1 = & 2 & +3x_3 & -2x_4 \\ x_2 = & 2 & -5x_3 & +3x_4 \end{array}$$

Modificações que preservam a otimalidade da base atual:

1. Nos custos de variáveis não básicas:
   - $\delta_3 \geq -\overline{c}_3 = -2$
   - $\delta_4 \geq -\overline{c}_4 = -7$
2. No custo da variável básica x_1.
   Adicionando δ_1 a c_1, temos para $j = 1, B(1) = 1$, $q_{12} = 0, q_{13} = -3, q_{14} = 2$.
   - $\delta_1 q_{12} \leq \overline{c_2}$, triv. satisfeita.
   - $\delta_1 q_{13} \leq \overline{c_3} \rightarrow \delta_1 \geq -\frac{2}{3}$
   - $\delta_1 q_{14} \leq \overline{c_4} \rightarrow \delta_1 \leq \frac{7}{2}$

Caso 1: x_j é uma variável não básica:

- A viabilidade da base ótima (em relação ao primal) não é afetada.
- É necessário verificar se a otimalidade (viab. dual) é afetada, através da não negatividade do custo reduzido $\overline{c}_j$.
- Vamos considerar que a entrada a_{ij} de A foi alterada para $a_{ij} + \delta$. Então precisamos garantir que $c_j - p^T(A_j + \delta e_i) \geq 0$ ou equivalentemente $\overline{c}_j - \delta p_i \geq 0$, onde $p^T = c_B^T B^{-1}$.
- Caso a condição acima seja violada, x_j deve entrar na base (Primal Simplex).

Caso 2: x_j é uma variável básica:

- A viabilidade da base ótima pode ser afetada, tanto no primal quanto no dual.
- Assumindo que a_{ij} seja alterado para $a_{ij} + \delta$, o conjunto de valores admissíveis para a variação resultar ainda em uma base ótima é um intervalo (assim como nos casos anteriores).
- Assumindo solução primal e dual ótimas não degeneradas dadas por x^*, p, se a coluna A_j for modificada para $A_j + \delta e_i$ temos que:

$$c^T x(\delta) = c^T x^* - \delta x_j^* p_i + O(\delta^2)$$

- Interpretação em termos do problema da dieta: se a_{ij} aumenta em δ, ganhamos *de graça*, δ unidades do nutriente i por unidade do alimento j. Uma vez que p_i denota o custo marginal do nutriente i, $\delta p_i x_j^*$ denota a redução de custo esperada.