

Cálculo Numérico

Erro de Integração Numérica

Ana Paula



- 1 Revisão
- 2 Erro na Interpolação
- 3 Erro de Integração
- 4 Análise dos Erros das Fórmulas Repetidas

Revisão

► Forma de Newton

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] \\ & + (x - x_0)f[x_0, x_1] \\ & + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

► onde a diferença dividida de ordem n é dada por

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

► e

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Erro na Interpolação

Erro na Interpolação

- ▶ É importante estimar o erro cometido quando uma função $f(x)$ é aproximada por $P_n(x)$
 - ▶ Seja z o novo valor a ser calculado
 - ▶ $z \in [x_0, x_n]$
- deve-se definir uma expressão para o erro $E_n(z)$ de modo que

$$E_n(z) = f(z) - P_n(z)$$

Forma de Newton

- Considerando $x_0, x_1, \dots, x_n$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 f(z) = & \underbrace{f[x_0]}_{P_0(z)} + \underbrace{(z-x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (z-x_0)\dots(z-x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]}_{P_n(z)} \\
 & + \underbrace{(z-x_0)\dots(z-x_{n-1})(z-x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]}_{R_n(z)}
 \end{aligned}$$

Erro na Interpolação

$$\begin{aligned} E_n(z) &= f(z) - [f(z) - (z - x_0) \dots (z - x_n) f[x_0, \dots, x_n, z]] \\ &= (z - x_0) \dots (z - x_n) f[x_0, \dots, x_n, z] \end{aligned}$$

- Sabendo que $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ então o erro na interpolação pode ser definido como

$$E_n(z) = (z - x_0) \dots (z - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

- onde $f(x)$ é $n + 1$ vezes continuamente diferenciável e $c \in [x_0, x_n]$

Erro na Interpolação

- ▶ Para obter o erro máximo possível:
- ▶ Sendo $f(x)$ e suas derivadas até ordem $n + 1$ contínuas em $[x_1, x_n]$, então

$$|E_n(z)| \leq \frac{|z - x_0| \dots |z - x_n|}{(n + 1)!} \max_{\gamma \in [x_1, x_n]} |f^{(n+1)}(\gamma)|$$

Exemplo

► **Exemplo 1**

Seja $f(x) = e^x + x - 1$. Encontre um polinômio interpolador que passe pelos pontos:

x	0,5	1,0
$f(x)$	1,1487	2,7183

Calcule $P(0,7)$ e determine um limitante superior para erro ao avaliar o polinômio em $x = 0,7$.

► Solução:

$$P_1(x) = 3,1392x - 0,4209$$

$$P_1(0,7) = 1,7765$$

$$|E_1(x)| \leq \frac{|0,7 - 0,5||0,7 - 1,0|}{(2)!} \max_{\gamma \in [0,5;1,0]} |f^{(2)}(\gamma)| = 0,03e^1 = 0,081548$$

Exemplo

▶ **Exemplo 1**

Seja $f(x) = e^x + x - 1$. Encontre um polinômio interpolador que passe pelos pontos:

x	0,5	1,0
$f(x)$	1,1487	2,7183

Calcule $P(0,7)$ e determine um limitante superior para erro ao avaliar o polinômio em $x = 0,7$.

▶ Solução:

$$P_1(x) = 3,1392x - 0,4209$$

$$P_1(0,7) = 1,7765$$

$$|E_1(x)| \leq \frac{|0,7 - 0,5||0,7 - 1,0|}{(2)!} \max_{\gamma \in [0,5;1,0]} |f^{(2)}(\gamma)| = 0,03e^1 = 0,081548$$

Erro de Integração

Análise do Erro – Regra do Trapézio

- ▶ Para a Regra do Trapézio: $n = 1$, $x_0 = a$ e $x_1 = b$
- ▶ Logo,

$$\begin{aligned}
 E_T &= \int_a^b R_1 dx \\
 E_T &\leq \int_a^b (x-a)(x-b) \frac{f''(\gamma)}{2!} dx \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{2} \int_a^b (x^2 - (a+b)x + ab) dx; \quad \gamma \in [a; b] \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{2} \left(\frac{x^3}{3} - (a+b) \frac{x^2}{2} + abx \right) \Big|_a^b \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{2} \left(\frac{(b)^3}{3} - (a+b) \frac{(b)^2}{2} + ab(b) - \frac{(a)^3}{3} + (a+b) \frac{(a)^2}{2} - ab(a) \right)
 \end{aligned}$$

Análise do Erro – Regra do Trapézio

► Continuando

$$\begin{aligned}
 E_T &\leq \frac{f''(\gamma)}{2} \left(\frac{(b)^3}{3} - (a+b)\frac{(b)^2}{2} + ab(b) - \frac{(a)^3}{3} + (a+b)\frac{(a)^2}{2} - ab(a) \right) \\
 &\leq \frac{f''(c)}{2} \left(-\frac{b^3}{6} + \frac{ab^2}{2} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^2b}{2} \right) \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{12} (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{12} (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\
 &\leq \frac{f''(\gamma)}{12} (a-b)^3 \\
 &\leq \frac{-f''(\gamma)}{12} (b-a)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3
 \end{aligned}$$

► Sempre considerar o γ que maximiza o módulo da função $f''(\gamma)$

Análise do Erro – Regra 1/3 de Simpson

- ▶ Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido até aqui, o erro ao aplicar a Regra 1/3 de Simpson é dado por

$$E_{1/3S} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5$$

- ▶ Sempre considerar o γ que maximiza o módulo da função $f^{(4)}(\gamma)$

Análise do Erro – Regra 3/8 de Simpson

- ▶ Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido até aqui, o erro ao aplicar a Regra 3/8 de Simpson é dado por

$$E_{3/8S} \leq \frac{-3f^{(4)}(\gamma)}{80}h^5$$

- ▶ Sempre considerar o γ que maximiza o módulo da função $f^{(4)}(\gamma)$

Análise dos Erros das Fórmulas Repetidas

Análise dos Erros das Fórmulas Repetidas

- ▶ Serão considerados que todos os espaçamentos são iguais
- ▶ $h_i = h$
- ▶ Logo,

$$h = \frac{b-a}{m} \Rightarrow m = \frac{b-a}{h}$$

Análise do Erro – Regra do Trapézio Repetida

- ▶ Sabendo que para a Regra do Trapézio

$$E_T \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{TR} &\leq \sum_{i=1}^m \frac{-f''(\gamma_i)}{12} h^3 \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 m \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 \frac{b-a}{h} \\ &\leq -\frac{f''(\gamma)}{12} h^2 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{12} \max_{\gamma \in [a;b]} |f''(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f''(\gamma)|$

Análise do Erro – Regra do Trapézio Repetida

- ▶ Sabendo que para a Regra do Trapézio

$$E_T \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{TR} &\leq \sum_{i=1}^m \frac{-f''(\gamma_i)}{12} h^3 \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 m \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 \frac{b-a}{h} \\ &\leq -\frac{f''(\gamma)}{12} h^2 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{12} \max_{\gamma \in [a;b]} |f''(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f''(\gamma)|$

Análise do Erro – Regra do Trapézio Repetida

- ▶ Sabendo que para a Regra do Trapézio

$$E_T \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{TR} &\leq \sum_{i=1}^m \frac{-f''(\gamma_i)}{12} h^3 \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 m \leq \frac{-f''(\gamma)}{12} h^3 \frac{b-a}{h} \\ &\leq -\frac{f''(\gamma)}{12} h^2 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|h^2}{12} \max_{\gamma \in [a;b]} |f''(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f''(\gamma)|$

Análise do Erro – Regra 1/3 de Simpson Repetida

- ▶ Para a Regra 1/3 de Simpson

$$E_{1/3S} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{1/3SR} &\leq \sum_{i=1}^{m/2} \frac{-f^{(4)}(\gamma_i)}{90} h^5 \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5 \frac{m}{2} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^5 \frac{b-a}{h} \\ &\leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^4 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{1/3SR}| \leq \frac{|b-a|h^4}{180} \max_{\gamma \in [a;b]} |f^{(4)}(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f^{(4)}|$
- ▶ O erro na Regra 3/8 de Simpson não será analisado aqui

Análise do Erro – Regra 1/3 de Simpson Repetida

- ▶ Para a Regra 1/3 de Simpson

$$E_{1/3S} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{1/3SR} &\leq \sum_{i=1}^{m/2} \frac{-f^{(4)}(\gamma_i)}{90} h^5 \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5 \frac{m}{2} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^5 \frac{b-a}{h} \\ &\leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^4 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{1/3SR}| \leq \frac{|b-a|h^4}{180} \max_{\gamma \in [a;b]} |f^{(4)}(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f^{(4)}|$
- ▶ O erro na Regra 3/8 de Simpson não será analisado aqui

Análise do Erro – Regra 1/3 de Simpson Repetida

- ▶ Para a Regra 1/3 de Simpson

$$E_{1/3S} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{1/3SR} &\leq \sum_{i=1}^{m/2} \frac{-f^{(4)}(\gamma_i)}{90} h^5 \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5 \frac{m}{2} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^5 \frac{b-a}{h} \\ &\leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^4 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{1/3SR}| \leq \frac{|b-a|h^4}{180} \max_{\gamma \in [a;b]} |f^{(4)}(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f^{(4)}|$

- ▶ O erro na Regra 3/8 de Simpson não será analisado aqui

Análise do Erro – Regra 1/3 de Simpson Repetida

- ▶ Para a Regra 1/3 de Simpson

$$E_{1/3S} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5$$

- ▶ Portando,

$$\begin{aligned} E_{1/3SR} &\leq \sum_{i=1}^{m/2} \frac{-f^{(4)}(\gamma_i)}{90} h^5 \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{90} h^5 \frac{m}{2} \leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^5 \frac{b-a}{h} \\ &\leq \frac{-f^{(4)}(\gamma)}{180} h^4 (b-a) \end{aligned}$$

- ▶ Assim, um limitante para o erro fica como

$$|E_{1/3SR}| \leq \frac{|b-a|h^4}{180} \max_{\gamma \in [a;b]} |f^{(4)}(\gamma)|$$

- ▶ γ maximiza $|f^{(4)}|$
- ▶ O erro na Regra 3/8 de Simpson não será analisado aqui

Exemplo

▶ Exemplo 3

Quantos subintervalos são necessários para que o erro ao calcular $\int_0^{1,5} \cos(x)dx$ utilizando a Regra do Trapézio Repetida seja menor ou igual a 10^{-3} .

▶ Solução:

$$m \geq 17$$

Exemplo

► Exemplo 3

Quantos subintervalos são necessários para que o erro ao calcular $\int_0^{1,5} \cos(x)dx$ utilizando a Regra do Trapézio Repetida seja menor ou igual a 10^{-3} .

► Solução:

$$m \geq 17$$

Exemplo

▶ Exemplo 5

Quantos subintervalos são necessários para que o erro ao calcular $\int_0^{1,5} \cos(x)dx$ utilizando a Regra 1/3 de Simpson Repetida seja menor ou igual a 10^{-3} .

▶ Solução:

$$m \geq 3 \Rightarrow m \geq 4 \text{ (} m \text{ deve ser par na Regra 1/3 de Simpson)}$$

Exemplo

▶ Exemplo 5

Quantos subintervalos são necessários para que o erro ao calcular $\int_0^{1,5} \cos(x)dx$ utilizando a Regra 1/3 de Simpson Repetida seja menor ou igual a 10^{-3} .

▶ Solução:

$$m \geq 3 \Rightarrow m \geq 4 \text{ (} m \text{ deve ser par na Regra 1/3 de Simpson)}$$