

Cálculo Numérico

Integração Numérica

Ana Paula



1 Aula Anterior

2 Fórmulas Repetidas

Aula Anterior

- ▶ Integração numérica
- ▶ Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes
 - ▶ Regra do Retângulo
 - ▶ Integração do polinômio constante que interpola $(a, f(a))$

$$I_R = hf(a)$$

- ▶ Regra do Ponto Médio
 - ▶ Integração do polinômio constante que interpola $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$

$$I_M = hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- ▶ Regra do Trapézio
 - ▶ Integração do polinômio interpolador linear

$$I_T = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

Aula Anterior

- ▶ Integração numérica
- ▶ Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes
 - ▶ Regra 1/3 de Simpson
 - ▶ Integração do polinômio interpolador quadrático

$$I_{1/3S} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

- ▶ Regra 3/8 de Simpson
 - ▶ Integração do polinômio interpolador cúbico

$$I_{3/8S} = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Fórmulas Repetidas

Fórmulas Repetidas

- ▶ Quando o intervalo é grande, pode não ser conveniente aumentar o grau do polinômio interpolador
- ▶ Uma ideia é dividir o intervalo original em diversos subintervalos e aplicar uma regra de integração em cada subintervalo
- ▶ Essas são as chamadas regras repetidas
 - ▶ generalizadas
 - ▶ compostas

Regra do Retângulo Repetida

- ▶ Dividindo o intervalo $[a; b]$ em m subintervalos, com $x_0 = a$, $x_m = b$ e $x_i = a + ih$ para $i = 0, \dots, m$, então

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

- ▶ Sendo a Regra do Retângulo dada por

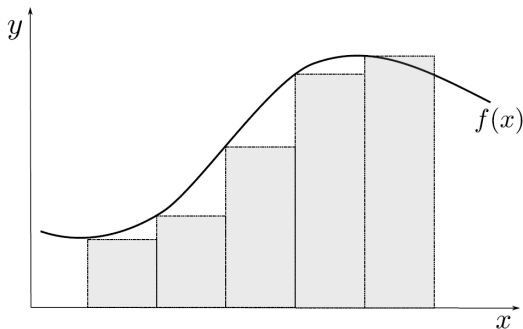
$$I_R = hf(a)$$

- ▶ Então a regra generalizada fica como

$$I_{RR} = \sum_{i=1}^m hf(x_{i-1})$$

Regra do Retângulo Repetida

$$I_{RR} = \sum_{i=1}^m h f(x_{i-1})$$



Regra do retângulo
generalizada

Regra do Ponto Médio Repetida

- ▶ Dividindo o intervalo $[a; b]$ em m subintervalos, com $x_0 = a$, $x_m = b$ e $x_i = a + ih$ para $i = 0, \dots, m$, então

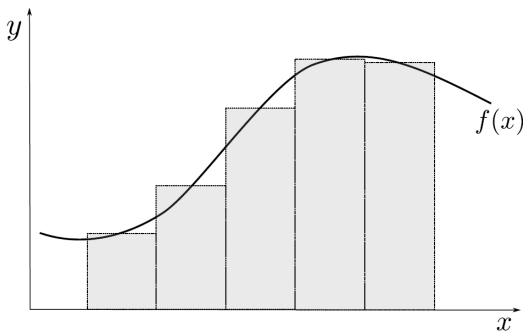
$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

- ▶ Para o caso do ponto médio tem-se que

$$I_M = hf\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Rightarrow I_{MR} = \sum_{i=1}^m hf\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Regra do Ponto Médio Repetida

$$I_{MR} = \sum_{i=1}^m h f \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right)$$



Regra do ponto médio
generalizada

Regra do Trapézio Repetida

- ▶ A Regra do Trapézio é dada por

$$I_T = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

- ▶ Subdividindo o intervalo de integração $[a; b]$ em m subintervalos iguais então

$$\begin{aligned} I_{TR} &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \\ &\quad \frac{h}{2} [f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})] + \frac{h}{2} [f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)] \end{aligned}$$

Regra do Trapézio Repetida

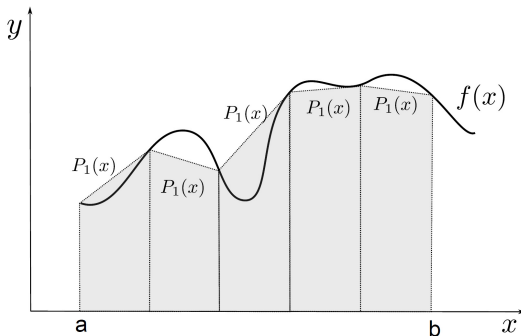
► Assim,

$$\begin{aligned} I_{TR} &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i) \end{aligned}$$

onde $c_0 = c_m = 1$ e $c_i = 2$, para $i = 1, \dots, m-1$

Regra do Trapézio Repetida

$$I_{TR} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i)$$

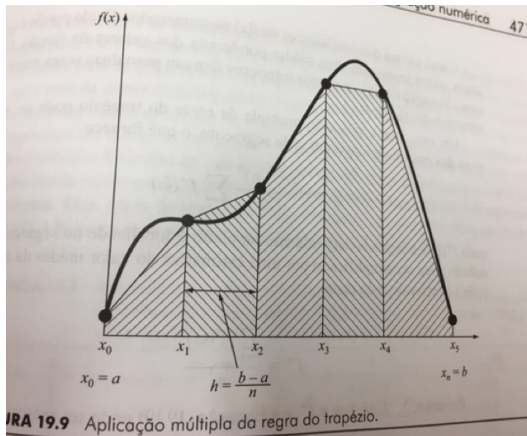


Exemplo

► Exemplo 1

Utilize a regra do trapézio com dois segmentos para obter a integração da função $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, de $a = 0$ a $b = 0,8$.

Regra Trapézio Repetida



Regra 1/3 de Simpson Repetida

- Sendo a Regra 1/3 de Simpson dada por

$$I_{1/3S} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

- Subdividindo o intervalo de integração $[a; b]$ em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais então

$$\begin{aligned} I_{1/3SR} &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\ &\quad \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \cdots + \frac{h}{3} [f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_m)] \end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson Repetida

► Portanto,

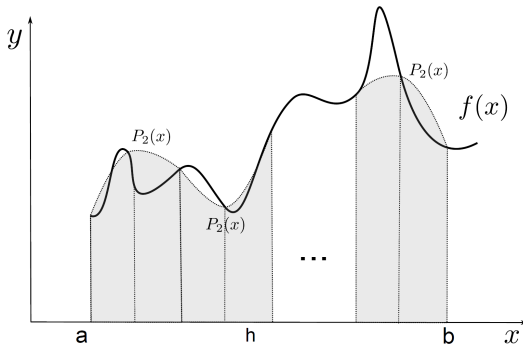
$$\begin{aligned} I_{1/3SR} &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i) \end{aligned}$$

onde

- $c_0 = c_m = 1$
- caso contrário ($i = 1, \dots, m-1$)
 - $c_i = 4$, se i for ímpar
 - $c_i = 2$, se i for par

Regra 1/3 de Simpson Repetida

$$I_{1/3SR} = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i)$$



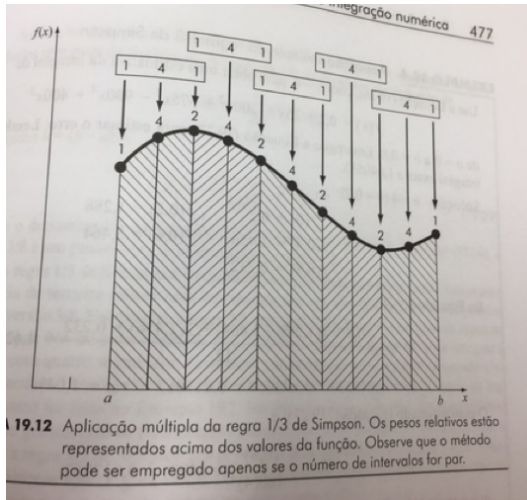
Exemplo

► Exemplo 2

Utilize a regra 1/3 de Simpson repetida, com $m = 4$ subintervalos, para obter a integração da função

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5, \text{ de } a = 0 \text{ a } b = 0,8.$$

Regra 1/3 de Simpson Repetida



Regra 1/3 de Simpson Repetida

► Importante

Total de subintervalos deve ser um número par!

Regra 3/8 de Simpson Repetida

- Sendo a Regra 3/8 de Simpson dada por

$$I_{3/8S} = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

- Subdividindo o intervalo de integração $[a; b]$ em m (múltiplo de 3) subintervalos iguais então

$$\begin{aligned} I_{3/8SR} &= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \frac{3h}{8} [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + \\ &\quad \frac{3h}{8} [f(x_6) + 3f(x_7) + 3f(x_8) + f(x_9)] + \cdots + \\ &\quad \frac{3h}{8} [f(x_{m-3}) + 3f(x_{m-2}) + 3f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + f(x_m)] \end{aligned}$$

Regra 3/8 de Simpson Repetida

► Portanto,

$$\begin{aligned}
 I_{3/8SR} &= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + f(x_m)] \\
 &= \frac{3h}{8} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i)
 \end{aligned}$$

onde

- $c_0 = c_m = 1$
- caso contrário ($i = 1, \dots, m-1$)
 - $c_i = 2$, se i for divisível por 3
 - $c_i = 3$, caso contrário

$$I_{3/8SR} = \frac{3h}{8} \sum_{i=0}^m c_i f(x_i)$$

Regra 3/8 de Simpson Repetida

► Importante

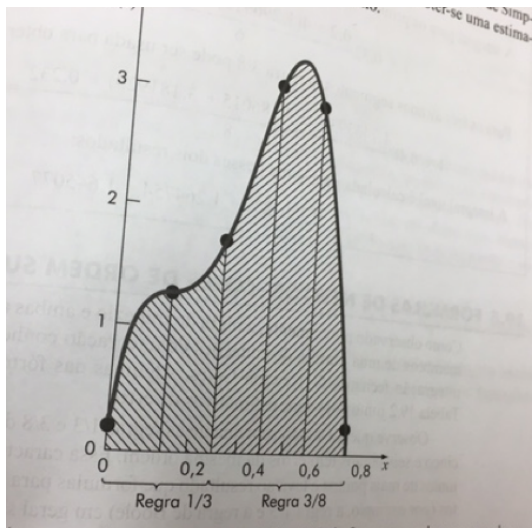
Total de subintervalos deve ser múltiplo de 3!

Exemplo

► Exemplo 3

Utilize a regra 1/3 de Simpson e a regra 3/8 de Simpson conjuntamente, com $m = 5$ subintervalos, para obter a integração da função $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, de $a = 0$ a $b = 0,8$.

Regra 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson usadas conjuntamente



Integração com segmentos desiguais

- ▶ Na prática, existem muitas situações nas quais os espaços não são igualmente espaçados.
 - ▶ Por exemplo, quando os dados são obtidos experimentalmente
- ▶ Nestes casos, podemos aplicar a regra do trapézio para cada segmento e somar os resultados:

$$I = h_1 \frac{(f(x_0) + f(x_1))}{2} + h_2 \frac{(f(x_1) + f(x_2))}{2} + \dots + h_n \frac{(f(x_{n-1}) + f(x_n))}{2}$$

Exemplo

► Exemplo 4

Integre a função $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, utilizando a regra do trapézio, para os seguintes pontos $x = [0, 0,12, 0,22, 0,32, 0,36, 0,40]$

Fontes

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF
- ▶ Livro: Métodos Numéricos Aplicados com Matlab para Engenheiros e Cientistas - Steven C. Chapra