

Cálculo Numérico

Integração Numérica

Ana Paula



- 1 Introdução
- 2 Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes
- 3 Análise do Erro

Introdução

Introdução

- ▶ Serão estudados aqui métodos numéricos para calcular uma aproximação para a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$

- ▶ O problema consiste em encontrar

$$I = I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

onde $f(x)$ é uma função contínua com derivadas contínuas em $[a; b]$

- ▶ Importante pois
 - ▶ nem sempre é possível determinar a primitiva $F(x)$, tal que, $F'(x) = f(x)$
 - ▶ a primitiva $F(x)$ pode ser complexa
 - ▶ em certos casos, apenas valores de $f(x_i)$ são conhecidos

Introdução

- ▶ Serão estudados aqui métodos numéricos para calcular uma aproximação para a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$

- ▶ O problema consiste em encontrar

$$I = I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

onde $f(x)$ é uma função contínua com derivadas contínuas em $[a; b]$

- ▶ Importante pois

- ▶ nem sempre é possível determinar a primitiva $F(x)$, tal que, $F'(x) = f(x)$
- ▶ a primitiva $F(x)$ pode ser complexa
- ▶ em certos casos, apenas valores de $f(x_i)$ são conhecidos

Introdução

- ▶ Serão estudados aqui métodos numéricos para calcular uma aproximação para a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$

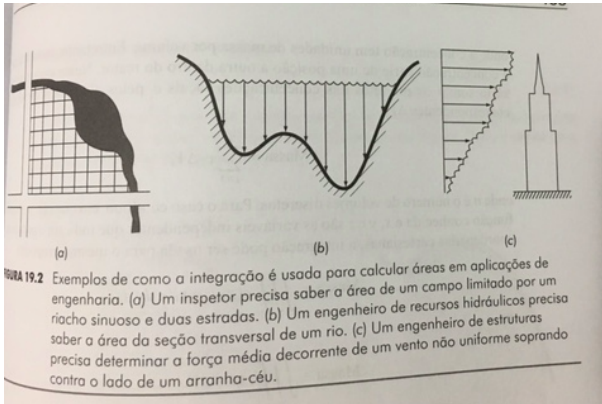
- ▶ O problema consiste em encontrar

$$I = I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

onde $f(x)$ é uma função contínua com derivadas contínuas em $[a; b]$

- ▶ Importante pois
 - ▶ nem sempre é possível determinar a primitiva $F(x)$, tal que, $F'(x) = f(x)$
 - ▶ a primitiva $F(x)$ pode ser complexa
 - ▶ em certos casos, apenas valores de $f(x_i)$ são conhecidos

Alguns Exemplos de Aplicações



Introdução

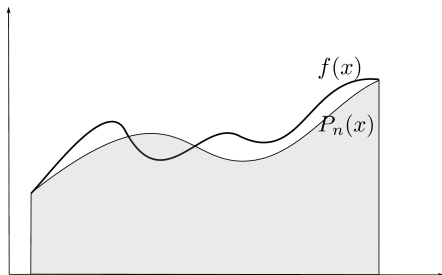
- ▶ De forma geral, a integração numérica consiste em integrar o polinômio $P_n(x)$ que interpola os pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

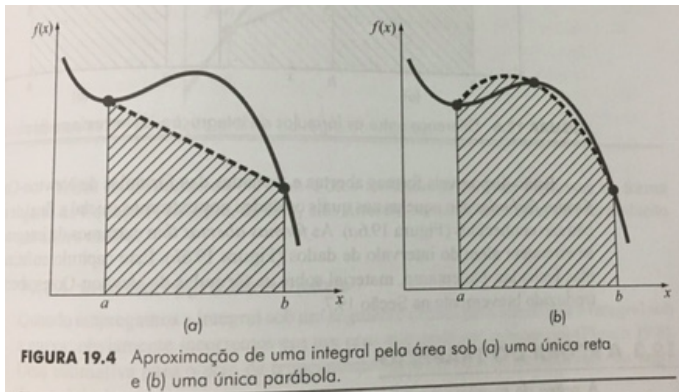
onde $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$

- ▶ Ou seja,

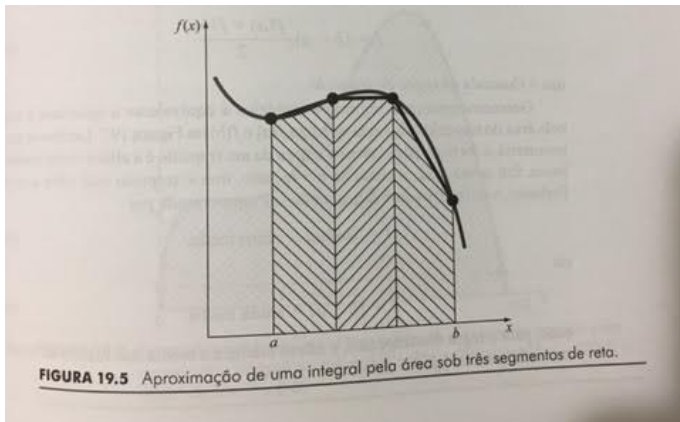
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx$$



Introdução



Introdução



Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes

Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes

- ▶ Considera-se inicialmente as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechada, isto é, quando $x_0 = a$ e $x_n = b$
- ▶ Serão adotados aqui polinômios interpoladores $P_n(x)$ sobre nós igualmente espaçados no intervalo $[a; b]$

- ▶ Assim,

$$x_i = \left(\frac{b-a}{n} \right) i + a; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ Além disso,

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_i = x_0 + ih; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ A Forma de Lagrange do polinômio interpolador será utilizada

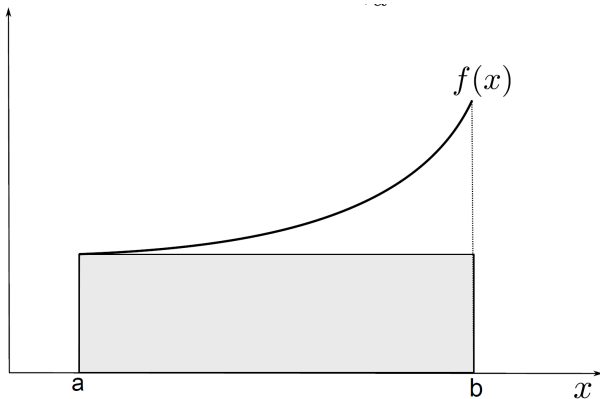
Regra do Retângulo

- ▶ O polinômio mais simples é uma constante
- ▶ Na Regra do Retângulo, $f(x)$ é aproximada pelo seu valor em $x_0 = a$ (ou $x_n = b$)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(a)dx \\ &= f(a) \int_a^b dx \\ &= f(a) \left(x \Big|_a^b \right) \\ &= f(a) (b - a) \\ &= hf(a)\end{aligned}$$

Regra do Retângulo

$$I_R = hf(a)$$



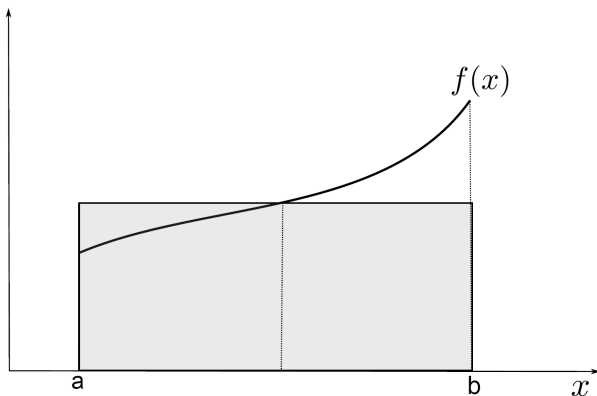
Regra do Ponto Médio

- ▶ Também pode-se aproximar $f(x)$ por uma outra constante tomada ao avaliar $f(x)$ em algum outro ponto do intervalo $[a; b]$
- ▶ Uma escolha comum é o ponto médio do intervalo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x\Big|_a^b\right) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) \\ &= hf\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

Regra do Ponto Médio

$$I_M = hf \left(\frac{a+b}{2} \right)$$



Regra do Trapézio

- ▶ Seja $P_1(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, com $x_0 = a$ e $x_1 = b$, então

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx$$

- ▶ A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$
$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- ▶ Assim,

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} [f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)] dx$$

Regra do Trapézio

- Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} [f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)] dx \\
 &= f(x_0) \int_{x_0}^{x_1} L_0(x) dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} L_1(x) dx \\
 &= f(x_0) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx
 \end{aligned}$$

- Sabendo que $x_1 = x_0 + h$ e fazendo a troca de variável que segue

$$x = x_0 + zh; \quad z \in [0; 1]$$

$$dx = h dz$$

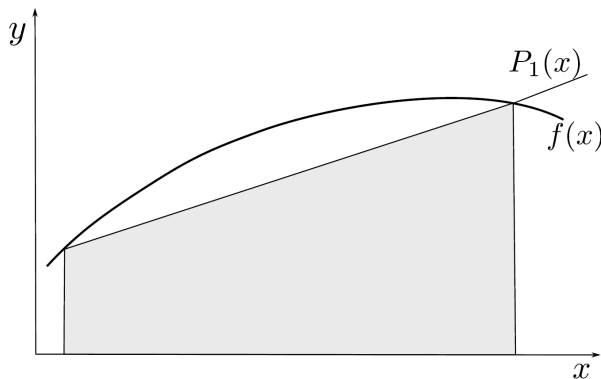
Regra do Trapézio

► Então

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx &= f(x_0) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx \\
 &= f(x_0) \int_0^1 \frac{x_0 + zh - x_0 - h}{-h} h dz + f(x_1) \int_0^1 \frac{x_0 + zh - x_0}{h} h dz \\
 &= -f(x_0) \int_0^1 (zh - h) dz + f(x_1) \int_0^1 zh dz \\
 &= -hf(x_0) \int_0^1 (z - 1) dz + hf(x_1) \int_0^1 z dz \\
 &= -hf(x_0) \left(\frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_0^1 + hf(x_1) \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= -hf(x_0) \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) + hf(x_1) \left(\frac{1^2}{2} \right) \\
 &= \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))
 \end{aligned}$$

Regra do Trapézio

$$I_T = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$



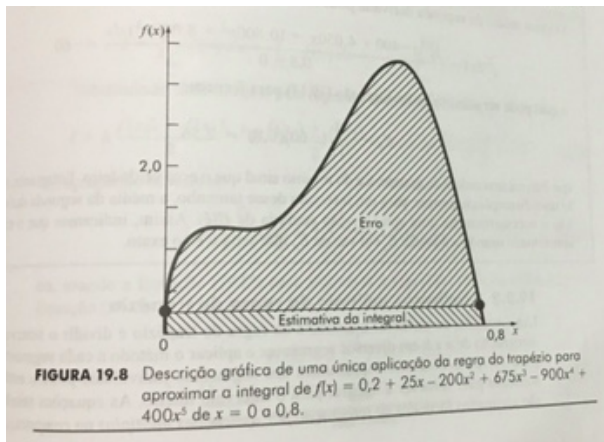
Exemplo

► Exemplo 1

Utilize a regra do trapézio para obter a integração da função

$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, de $a = 0$ a $b = 0,8$.

Regra do Trapézio



Regra 1/3 de Simpson

- ▶ Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_2(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$

- ▶ A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Regra 1/3 de Simpson

- Assim,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = & f(x_0) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx + \\ & f(x_1) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx + \\ & f(x_2) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx \end{aligned}$$

- Sabe-se que $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$
- Cada integral da soma é então determinada trocando

$$x = x_0 + zh; \quad z \in [0; 2]$$

$$dx = h dz$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx &= \int_0^2 \frac{(x_0 + zh - x_0 - h)(x_0 + zh - x_0 - 2h)}{(-h)(-2h)} h dz \\
 &= \int_0^2 \frac{(zh - h)(zh - 2h)}{2h} dz \\
 &= \frac{h^2}{2h} \int_0^2 (z - 1)(z - 2) dz \\
 &= \frac{h}{2} \int_0^2 (z^2 - 3z + 2) dz \\
 &= \frac{h}{2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^2}{2} + 2z \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{h}{2} \left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{3(2)^2}{2} + 2(2) \right) \\
 &= \frac{h}{6} (8 - 18 + 12) = \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx &= \int_0^2 \frac{(x_0 + zh - x_0)(x_0 + zh - x_0 - 2h)}{(h)(-h)} h dz \\
 &= \int_0^2 \frac{(zh)(zh - 2h)}{-h} dz \\
 &= \frac{h^2}{-h} \int_0^2 z(z - 2) dz \\
 &= -h \left(\frac{z^3}{3} - \frac{2z^2}{2} \right) \Big|_0^2 \\
 &= -h \left(\frac{(2)^3}{3} - (2)^2 \right) \\
 &= \frac{-h}{3} (8 - 12) \\
 &= \frac{4h}{3}
 \end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx &= \int_0^2 \frac{(x_0 + zh - x_0)(x_0 + zh - x_0 - h)}{(2h)(h)} h dz \\&= \int_0^2 \frac{(zh)(zh - h)}{2h} dz \\&= \frac{h^2}{2h} \int_0^2 z(z - 1) dz \\&= \frac{h}{2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 \\&= \frac{h}{2} \left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} \right) \\&= \frac{h}{12} (16 - 12) \\&= \frac{h}{3}\end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson

► Sendo

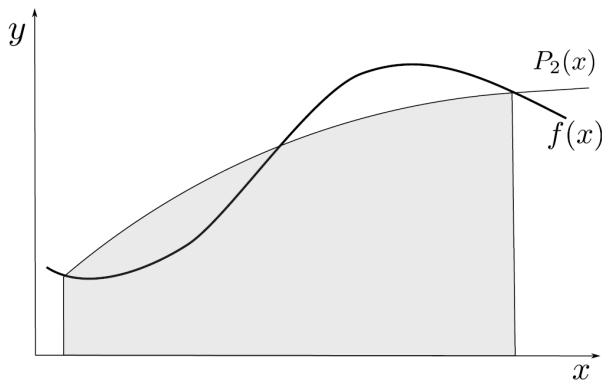
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = & f(x_0) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx + \\ & f(x_1) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx + \\ & f(x_2) \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx \end{aligned}$$

► Obtém-se então

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx &= f(x_0) \frac{h}{3} + f(x_1) \frac{4h}{3} + f(x_2) \frac{h}{3} \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson

$$I_{1/3S} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$



Exemplo

► Exemplo 2

Utilize a regra 1/3 de Simpson para obter a integração da função $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, de $a = 0$ a $b = 0,8$.

Regra 3/8 de Simpson

- ▶ Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_3(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx$$

- ▶ A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

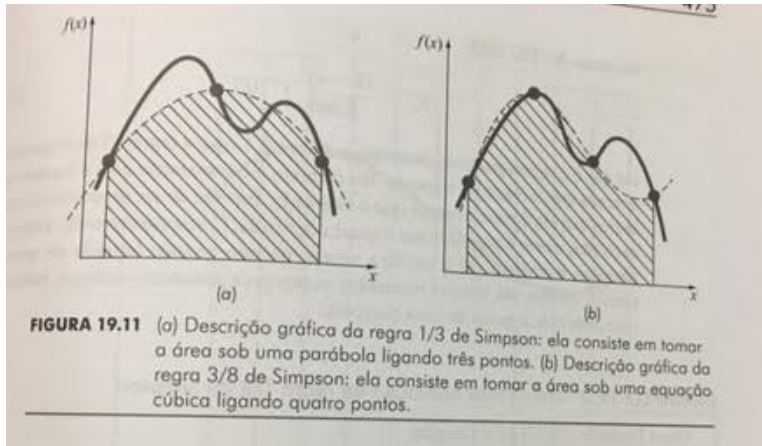
$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Regra 3/8 de Simpson

- ▶ Novamente, pode-se utilizar o polinômio interpolador na Forma de Lagrange
- ▶ A Regra 3/8 de Simpson é definida como

$$I_{3/8S} = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes



Exemplo

► Exemplo 3

Utilize a regra 3/8 de Simpson para obter a integração da função $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, de $a = 0$ a $b = 0,8$.

Análise do Erro

Análise do Erro

- ▶ Em todos os casos apresentados, $f(x)$ foi aproximada por um polinômio interpolador $P_n(x)$ no intervalo $[a; b]$
- ▶ As Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes foram definidas como sendo a integral de $P_n(x)$

- ▶ O erro na integração numérica é então definido como

$$E = \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx$$

- ▶ Sabendo que o erro na interpolação é dado por

$$f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

então o erro na integração numérica fica como

$$E = \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx = \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] dx$$

Fontes

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF
- ▶ Livro: Métodos Numéricos Aplicados com Matlab para Engenheiros e Cientistas - Steven C. Chapra