

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Ana Paula



1 Interpolação Polinomial

2 Forma de Lagrange

3 Revisão

Interpolação Polinomial

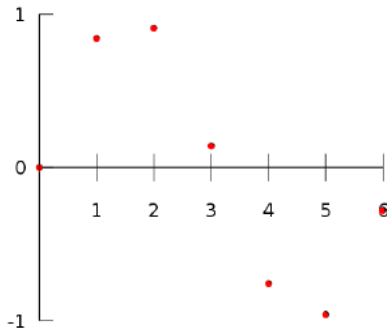
Interpolação Polinomial

- Suponha que se tenha um conjunto de $n + 1$ pontos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

e seus respectivos valores em relação a uma função $f(x)$, ou seja,

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$



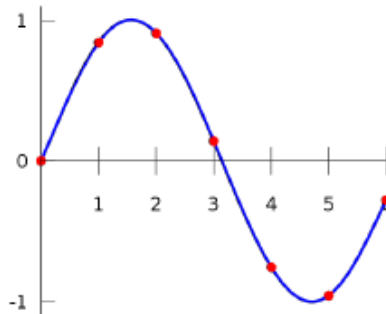
Interpolação Polinomial

- Interpolar os pontos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

consiste em obter uma função $g(x)$ tal que

$$g(x_0) = y_0, g(x_1) = y_1, \dots, g(x_n) = y_n$$



Interpolação Polinomial

- ▶ Polinômios serão adotados aqui como interpoladores
 - ▶ São computados facilmente
 - ▶ Suas derivadas e integrais também são polinômios
- ▶ A interpolação polinomial é utilizada principalmente quando
 - ▶ A expressão de $f(x)$ não é conhecida
 - ▶ A função $f(x)$ é complexa

Interpolação Polinomial

- ▶ Polinômios serão adotados aqui como interpoladores
 - ▶ São computados facilmente
 - ▶ Suas derivadas e integrais também são polinômios
- ▶ A interpolação polinomial é utilizada principalmente quando
 - ▶ A expressão de $f(x)$ não é conhecida
 - ▶ A função $f(x)$ é complexa

Interpolação Polinomial – Definição

- ▶ O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, dados $n + 1$ pontos distintos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

e seus respectivos pares

$$y_0, y_1, \dots, y_n$$

determinar um Polinômio $P_n(x)$ de grau máximo n tal que

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$$

- ▶ Em geral, $y_i = f(x_i)$

Interpolação Polinomial – Definição

- ▶ O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, dados $n + 1$ pontos distintos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

e seus respectivos pares

$$y_0, y_1, \dots, y_n$$

determinar um Polinômio $P_n(x)$ de grau máximo n tal que

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$$

- ▶ Em geral, $y_i = f(x_i)$

Interpolação Polinomial

- ▶ Deseja-se obter um polinômio na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

- ▶ Para esse fim, deve-se determinar os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de modo que

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n$$

- ▶ Assim, verifica-se que uma forma de determinar o polinômio interpolador é resolvendo um sistema de equações lineares com $n + 1$ incógnitas

Interpolação Polinomial

- ▶ Em forma matricial o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- ▶ A matriz de coeficientes é chamada de Matriz de Vandermonde
- ▶ Sabe-se que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam distintos
- ▶ **Teorema** Dados $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seus respectivos valores $y_0, y_1, \dots, y_n$, então existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau máximo n , tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Interpolação Polinomial

- ▶ Em forma matricial o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- ▶ A matriz de coeficientes é chamada de Matriz de Vandermonde
- ▶ Sabe-se que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam distintos
- ▶ **Teorema** Dados $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seus respectivos valores $y_0, y_1, \dots, y_n$, então existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau máximo n , tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Exemplo

► Exemplo 1

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos que seguem.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

► Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$

Exemplo

► Exemplo 1

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos que seguem.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

► Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$

Interpolação Polinomial

▶ Observações

- ▶ Outras formas de se determinar o polinômio interpolante serão vistas
 - ▶ sem a necessidade de resolver um sistema de equações lineares
 - ▶ complexidade computacional $O(n^3)$
- ▶ A matriz de Vandermonde costuma ser mal condicionada
 - ▶ leva à perda de precisão da solução

Forma de Lagrange

Forma de Lagrange

- ▶ Um exemplo será utilizado para ilustrar a ideia
- ▶ Dados os três pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$
- ▶ Deseja-se encontrar o polinômio

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

tal que

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Forma de Lagrange

- ▶ Um exemplo será utilizado para ilustrar a ideia
- ▶ Dados os três pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$
- ▶ Deseja-se encontrar o polinômio

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

tal que

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Forma de Lagrange

- Uma fórmula para encontrar tal polinômio é a seguinte

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- As funções $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são chamadas de funções de base de Lagrange

Forma de Lagrange

- Uma fórmula para encontrar tal polinômio é a seguinte

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- As funções $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são chamadas de funções de base de Lagrange

Forma de Lagrange

- ▶ Além de serem polinômios de grau n , essas funções são definidas de modo que

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde $i, j = 0, 1, \dots, n$

- ▶ Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2
- ▶ É fácil ver que o polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_1) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_0 L_0(x_2) + y_1 L_1(x_2) + y_2 L_2(x_2) = y_2$$

Forma de Lagrange

- ▶ Além de serem polinômios de grau n , essas funções são definidas de modo que

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde $i, j = 0, 1, \dots, n$

- ▶ Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2
- ▶ É fácil ver que o polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_1) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_0 L_0(x_2) + y_1 L_1(x_2) + y_2 L_2(x_2) = y_2$$

Forma de Lagrange

- ▶ Considerando $n + 1$ pontos distintos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

- ▶ O polinômio interpolador na forma de Lagrange é dado por

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

onde

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Forma de Lagrange

Entrada: número de pontos n , vetores x e y de dados, valor a ser interpolado z

1 **inicio**

2 $r \leftarrow 0;$

3 **para** $i = 0, \dots, n - 1$ **faça**

4 $c \leftarrow 1;$

5 $d \leftarrow 1;$

6 **para** $j = 0, \dots, n - 1$ **faça**

7 $c \leftarrow c * (z - x_j);$

8 $d \leftarrow d * (x_i - x_j);$

9 $r \leftarrow r + y_i * (c/d);$

0 **retorna** r

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Lagrange que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

- ▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$
- ▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Lagrange que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$

▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Lagrange que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

- ▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$
- ▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Forma de Lagrange

► Observações

- O algoritmo executa um total de operações aritméticas na ordem de n^2
- A complexidade computacional é menor do que resolver um sistema de equações lineares ($O(n^3)$)
- Embora simples, avaliar um novo ponto z é computacionalmente custoso na Forma de Lagrange para o polinômio interpolador
- Além disso, aumentar o grau do polinômio interpolador requer que as bases $L_i(x)$ sejam computadas novamente

Interpolação Polinomial

- Sejam os pontos da tabela que segue

x	1	1,1	1,2	1,3
$\tan(x)$	1,5574	1,9648	2,5722	3,6021

- Construindo polinômios interpoladores de grau $n = 1, 2, 3$, então

n	1	2	3
pontos	x_0, x_1	x_0, x_1, x_2	x_0, x_1, x_2, x_3
$P_n(x)$	2,2685	2,2435	2,2296
erro	0,0340	0,0090	0,0049

- Adotando $\tan(1,15) = 2,2345$ como base da comparação

Interpolação Polinomial

- ▶ Observa-se que
 - ▶ A aproximação tende a melhorar quando aumenta-se n
 - ▶ Será visto que o erro aumenta quando n assume valores muito grandes
 - ▶ Problemas podem aparecer quando $n \geq 10$
 - ▶ Outras formas de interpolação serão vistas para evitar esse tipo de situação
 - ▶ Utilizar interpolação com polinômios de grau menor em partes do intervalo original

Revisão

Revisão

- ▶ Interpolação Polinomial
- ▶ Encontrar $P_n(x)$ que interpole os $n + 1$ pontos dados
- ▶ Solução única se os pontos forem distintos
- ▶ Pode ser determinado resolvendo um sistema de equações lineares
- ▶ Forma de Lagrange

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)} \quad \text{com} \quad \boxed{L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}$$

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?

