

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

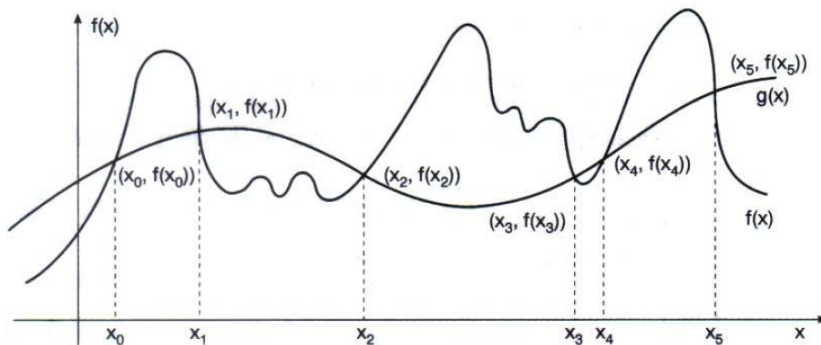
Ana Paula



- 1 Aula Anterior
- 2 Diferenças Divididas
- 3 Forma de Newton
- 4 Revisão

Aula Anterior

Problema



Aula Anterior

- ▶ Interpolação Polinomial
- ▶ Encontrar $P_n(x)$ que interpole os $n + 1$ pontos dados
- ▶ Solução única se os pontos forem distintos
- ▶ Pode ser determinado resolvendo um sistema de equações lineares
- ▶ Forma de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad \text{com} \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Diferenças Divididas

Diferenças Divididas

- ▶ Seja a função $f(x)$ e $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$
- ▶ A diferença dividida de ordem zero é o valor de $f(x)$ no ponto x_i

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- ▶ A diferença dividida de primeira ordem de x_0 e x_1 é dada por

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- ▶ Seguindo, tem-se que
 - ▶ Segunda ordem sobre x_0, x_1 e x_2 :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- ▶ Terceira ordem sobre x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Diferenças Divididas

- ▶ Seja a função $f(x)$ e $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$
- ▶ A diferença dividida de ordem zero é o valor de $f(x)$ no ponto x_i

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- ▶ A diferença dividida de primeira ordem de x_0 e x_1 é dada por

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- ▶ Seguindo, tem-se que

- ▶ Segunda ordem sobre x_0, x_1 e x_2 :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- ▶ Terceira ordem sobre x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Diferenças Divididas

- ▶ Seja a função $f(x)$ e $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$
- ▶ A diferença dividida de ordem zero é o valor de $f(x)$ no ponto x_i

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- ▶ A diferença dividida de primeira ordem de x_0 e x_1 é dada por

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- ▶ Seguindo, tem-se que
 - ▶ Segunda ordem sobre x_0, x_1 e x_2 :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- ▶ Terceira ordem sobre x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Diferenças Divididas

- ▶ A diferença dividida de ordem n é dada por

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- ▶ Lembrando que

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ Nota-se que a definição de diferenças divididas é recursiva

Diferenças Divididas

- ▶ A diferença dividida de ordem n é dada por

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- ▶ Lembrando que

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ Nota-se que a definição de diferenças divididas é recursiva

Diferenças Divididas – Cálculo Sistemático

- Para determinar as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots$, o seguinte esquema pode ser adotado:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\vdots$	...
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Diferenças Divididas – Cálculo Sistemático

- Para determinar as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots$, o seguinte esquema pode ser adotado:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\vdots$	...
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Diferenças Divididas – Cálculo Sistemático

- Para determinar as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots$, o seguinte esquema pode ser adotado:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\vdots$	...
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Diferenças Divididas – Cálculo Sistemático

- Para determinar as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots$, o seguinte esquema pode ser adotado:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\vdots$	...
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Diferenças Divididas – Cálculo Sistemático

- Para determinar as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots$, o seguinte esquema pode ser adotado:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\vdots$	...
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Exemplo

► Exemplo 1

Seja $f(x) = \cos(x)$; encontre $f[x_0, x_1, x_2]$ assumindo $x_0 = 0,2$, $x_1 = 0,3$ e $x_2 = 0,4$.

► Solução:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0,2	0,980	$\frac{0,955 - 0,980}{0,3 - 0,2} = -0,247$	$\frac{-0,342 - (-0,247)}{0,4 - 0,2} = -0,475$
0,3	0,955	$\frac{0,921 - 0,955}{0,4 - 0,3} = -0,342$	
0,4	0,921		

Diferenças Divididas

- ▶ As diferenças divididas de ordem n de uma função independem da ordem dos argumentos $[x_0, x_1, \dots, x_n]$

- ▶ Logo,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$$

para qualquer permutação $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ de $(0, 1, \dots, n)$

- ▶ Por exemplo,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Diferenças Divididas

- ▶ As diferenças divididas de ordem n de uma função independem da ordem dos argumentos $[x_0, x_1, \dots, x_n]$

- ▶ Logo,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$$

para qualquer permutação $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ de $(0, 1, \dots, n)$

- ▶ Por exemplo,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Forma de Newton

Forma de Newton

- ▶ Seja $f(x)$ contínua e com derivadas contínuas em $[a, b]$, e os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos em $[a, b]$
- ▶ Iniciando com x_0 , então

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0}$$

$$(x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f[x_0]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x]$$

Forma de Newton

- ▶ Seja $f(x)$ contínua e com derivadas contínuas em $[a, b]$, e os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos em $[a, b]$
- ▶ Iniciando com x_0 , então

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0}$$

$$(x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f[x_0]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x]$$

Forma de Newton

- ▶ Seja $f(x)$ contínua e com derivadas contínuas em $[a, b]$, e os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos em $[a, b]$
- ▶ Iniciando com x_0 , então

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0}$$

$$(x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f[x_0]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x]$$

Forma de Newton

- Considerando x_0 e x_1 , então

$$\begin{aligned}f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{\frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}\end{aligned}$$

- Logo,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

Forma de Newton

- Considerando x_0 e x_1 , então

$$\begin{aligned}f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{\frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}\end{aligned}$$

- Logo,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

Forma de Newton

- Considerando x_0 e x_1 , então

$$\begin{aligned}f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{\frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\&= \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}\end{aligned}$$

- Logo,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

Forma de Newton

- Considerando x_0 e x_1 , então

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\
 &= \frac{\frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\
 &= \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}
 \end{aligned}$$

- Logo,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

Forma de Newton

► Assim,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x] = f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]$$

Forma de Newton

► Assim,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x] = f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]$$

Forma de Newton

► Assim,

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x] = f(x) - f[x_0] - (x - x_0)f[x_0, x_1]$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]$$

Forma de Newton

- De forma análoga, considerando $x_0, x_1, \dots, x_n$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\overbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]}^{P_n(x)}}_{P_1(x)} \\
 & \underbrace{\overbrace{+ (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)f[x_0, \dots, x_n, x]}^{P_0(x)}}_{R_n(x)}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]}_{P_1(x)} + \underbrace{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)f[x_0, \dots, x_n, x]}_{R_n(x)}$$

Forma de Newton

► Teorema

O polinômio

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots \\ + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

é o polinômio de interpolação da função $y = f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$, isto é,

$$P_n(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Newton que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

- ▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$
- ▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Newton que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$

▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Exemplo

▶ Exemplo 2

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 na Forma de Newton que interpola os pontos que seguem. Simplifique o polinômio.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0,54$	1	$0,54$

- ▶ Solução: $P_2(x) = 1 - 0,46x^2$
- ▶ Nota-se que o polinômio é o mesmo que aquele obtido anteriormente pois, como foi visto, este polinômio é único

Forma de Newton

► Observações

- O polinômio interpolador na Forma de Newton utiliza o resultado da primeira linha de cada coluna da tabela diferenças divididas

- Nota-se que

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n],$$

ou seja, tendo um polinômio de grau $\leq n - 1$ sobre n pontos, $P_n(x)$ pode ser obtido apenas definindo o último termo associado ao operador de diferença dividida de ordem n

- Não é difícil verificar a semelhança com os Polinômios de Taylor

Forma de Newton – Determinação dos coeficientes

Entrada: número de pontos n , vetores x e y de dados

```

1 início
2   para  $i = 0, \dots, n - 1$  faça                                /* Coluna 1 */
3      $d_i \leftarrow y_i$ ;
4   para  $k = 1, \dots, n - 1$  faça                                /* Coluna k */
5     para  $i = n - 1, \dots, k$  faça                            /* Diferenças divididas */
6        $d_i \leftarrow \frac{d_i - d_{i-1}}{x_i - x_{i-k}}$ ;
7   retorna  $d$ 
  
```

Algoritmo 1: Determinação dos coeficientes $d - O(n^2)$

Revisão

► Forma de Newton

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] \\ & + (x - x_0)f[x_0, x_1] \\ & + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

► onde a diferença dividida de ordem n é dada por

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

► e

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?

