

Cálculo Numérico: Lista de Exercícios

Métodos para a Resolução de Sistemas Lineares

Método de Eliminação de Gauss:

1. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 8x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Resolva-o pelo método de Eliminação de Gauss.

2. Repita o exercício 1 para o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Verificar, usando o método de Eliminação de Gauss, que o sistema linear abaixo não tem solução.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Use o método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial no sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}.$$

5. Seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \end{cases}$$

Simule uma máquina que opera com 3 dígitos na mantissa com arredondamento e resolva o sistema usando:

- (a) O Método de Gauss sem Pivotamento.
- (b) O Método de Gauss com Pivotamento Parcial.
- (c) Sabendo que a solução do sistema é aproximadamente

$$x^* = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$$

comente os resultados.

6. Resolva os seguintes sistemas utilizando eliminação gaussiana sem e com pivoteamento, utilizando:

- a) Quatro dígitos na representação em ponto flutuante.

$$\begin{cases} 0,004 x_1 + 15,73 x_2 = 15,77 \\ 0,423 x_1 - 24,72 x_2 = -20,49 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 12,50$ e $x_2 = 0.9994$; Com pivoteamento $x_1 = 10,0$ e $x_2 = 1,0$.

b) Três dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} 0,0002 x_1 + 2 x_2 = 5 \\ 2 x_1 + 2 x_2 = 6 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 0,0$ e $x_2 = 2,5$; Com pivoteamento $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 2,5$.

c) Dois dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} x_1 + 4 x_2 + 52 x_3 = 57 \\ 22 x_1 + 110 x_2 - 3 x_3 = 134 \\ 22 x_1 + 2 x_2 + 14 x_3 = 38 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 0,0$, $x_2 = 0,0$ e $x_3 = 1,1$; Com pivoteamento $x_1 = 1,0$, $x_2 = 1,0$ e $x_3 = 1,0$.

Fatoração de Matrizes (LU, Cholesky):

7. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 102x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Resolva-o usando a decomposição LU .

(b) Calcule o determinante de A usando a decomposição.

8. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Decompor A em L e U .

(b) Através da decomposição LU , calcular o determinante de A .

(c) Resolver o sistema $Ax = b_1$, onde $b_1 = (0, -7, -5)^t$.

(d) Resolver o sistema $Ax = b_2$, onde $b_2 = (1, 1, 5)^t$.

9. Encontre a decomposição $A = LU$ das seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

10. Uma vez realizada a decomposição $A = LU$, o determinante da matriz pode ser calculado como $\det(A) = u_{11} \times u_{22} \times \dots \times u_{nn}$. Calcule o determinante das matrizes da questão 9.

11. Utilize as decomposições $A = LU$ da questão 9 para resolver os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ para } b = (21, 0 \ 3)^t \text{ e } b = (1, 0 \ 0, 0)^t$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ para } b = (3 \ 11 \ 15)^t \text{ e } b = (1 \ 1 \ 1)^t$$

12. Calcule as inversas das matrizes da questão 9 com auxílio da decomposição $A = LU$.

13. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Verificar se A satisfaz as condições para a existência da decomposição de Cholesky.

(b) Decompor A em LL^T .

(c) Através da decomposição de Cholesky, calcular o determinante de A .

(d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (0, 6, 5)^t$.