

Cálculo Numérico

Raízes de Equações

Ana Paula



Sumário

- 1 Aula Anterior
- 2 Método da Falsa Posição
- 3 Revisão

Aula Anterior

Aula Anterior

- ▶ Introdução
 - ▶ Definição de raiz
 - ▶ Definição de Multiplicidade
 - ▶ Existência de ao menos uma raiz no intervalo $[a, b]$ quando $f(x)$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$
 - ▶ Unicidade da raiz no intervalo
 - ▶ Determinação de um intervalo que contenha alguma raiz
 - ▶ Critério de parada

Aula Anterior

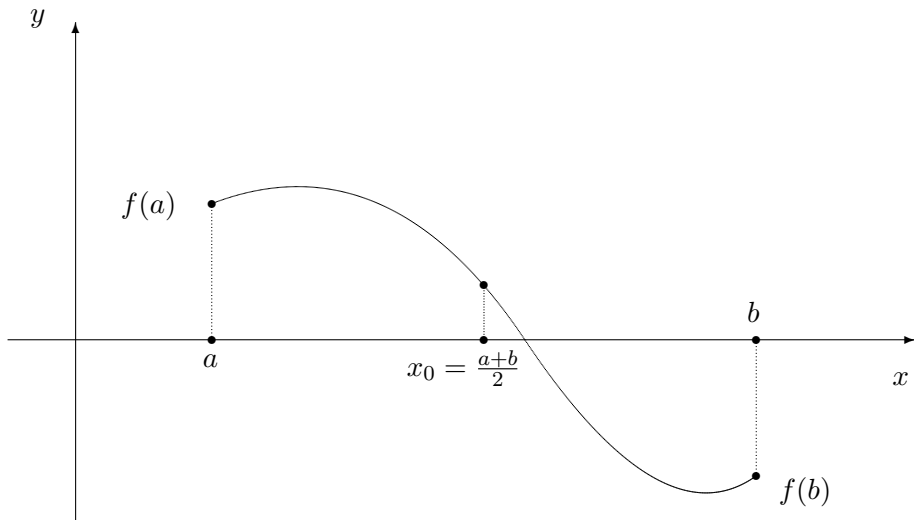
- ▶ Método da Bisseção
 - ▶ Utiliza a ideia da existência de ao menos uma raiz no intervalo $[a, b]$ quando $f(x)$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$
 - ▶ O intervalo é dividido ao meio a cada iteração
 - ▶ Ordem de convergência linear

Método da Falsa Posição

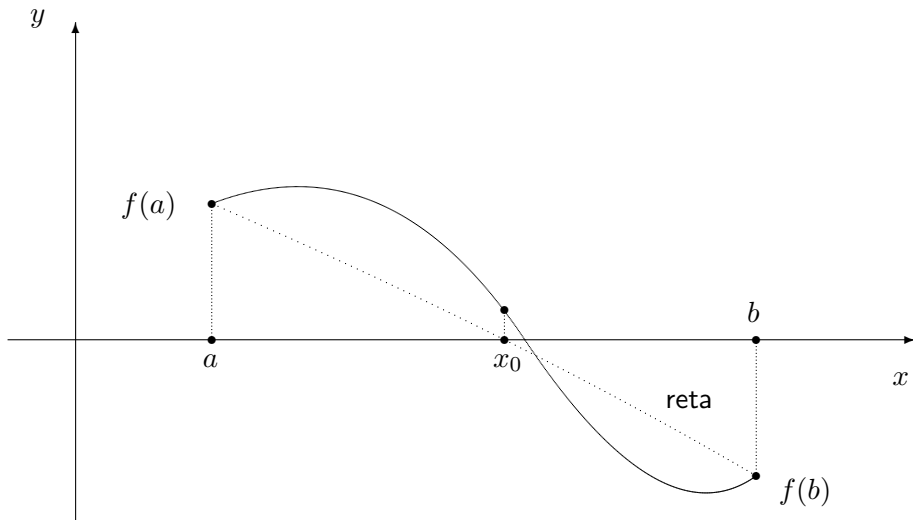
Método da Falsa Posição

- ▶ Nesse método, a aproximação x_k para a raiz r passa a ser o zero da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$
- ▶ Assim como o Método da Bissecção, o intervalo é atualizado a cada iteração mantendo a raiz em seu interior
 - ▶ $f(a)f(b) < 0$

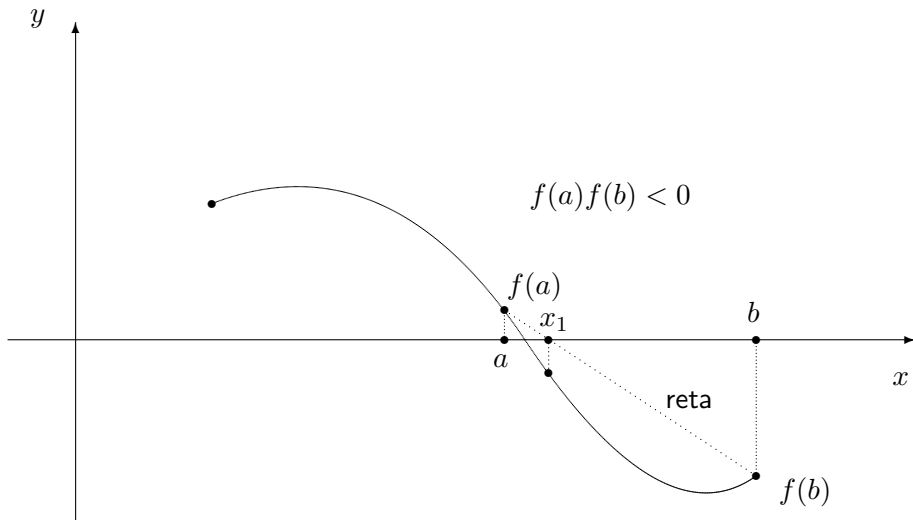
No Método da Bisseção



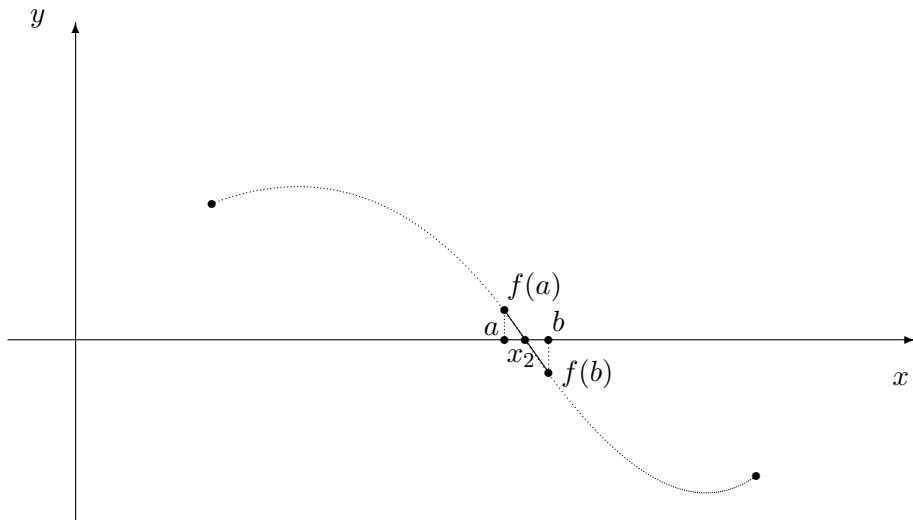
Método da Falsa Posição



Método da Falsa Posição



Método da Falsa Posição



Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- A reta $g(x)$ da equação que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é tal que

$$g(x) = px + q \Rightarrow \begin{cases} f(a) = pa + q \\ f(b) = pb + q \end{cases}$$

- Subtraindo as equações

$$f(b) - f(a) = pb - pa \quad \Rightarrow \quad p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} f(b) = pb + q &\Rightarrow f(b) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b + q \\ &\Rightarrow q = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- A reta $g(x)$ da equação que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é tal que

$$g(x) = px + q \Rightarrow \begin{cases} f(a) = pa + q \\ f(b) = pb + q \end{cases}$$

- Subtraindo as equações

$$f(b) - f(a) = pb - pa \quad \Rightarrow \quad p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} f(b) = pb + q &\Rightarrow f(b) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b + q \\ &\Rightarrow q = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- A reta $g(x)$ da equação que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é tal que

$$g(x) = px + q \Rightarrow \begin{cases} f(a) = pa + q \\ f(b) = pb + q \end{cases}$$

- Subtraindo as equações

$$f(b) - f(a) = pb - pa \quad \Rightarrow \quad p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} f(b) = pb + q &\Rightarrow f(b) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b + q \\ &\Rightarrow q = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- Substituindo os valores determinados para p e q em $g(x) = px + q$

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b$$

- x_k é determinado de modo que $g(x_k) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= -f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= \frac{-f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b}{b - a} \\ (f(b) - f(a)) x_k &= -f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- Substituindo os valores determinados para p e q em $g(x) = px + q$

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b$$

- x_k é determinado de modo que $g(x_k) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= -f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= \frac{-f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b}{b - a} \\ (f(b) - f(a)) x_k &= -f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- Substituindo os valores determinados para p e q em $g(x) = px + q$

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b$$

- x_k é determinado de modo que $g(x_k) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= -f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= \frac{-f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b}{b - a} \\ (f(b) - f(a)) x_k &= -f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- Substituindo os valores determinados para p e q em $g(x) = px + q$

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b$$

- x_k é determinado de modo que $g(x_k) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= -f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= \frac{-f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b}{b - a} \\ (f(b) - f(a)) x_k &= -f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

► Determinando x_k :

- Substituindo os valores determinados para p e q em $g(x) = px + q$

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b$$

- x_k é determinado de modo que $g(x_k) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k + f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= -f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) b \\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x_k &= \frac{-f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b}{b - a} \\ (f(b) - f(a)) x_k &= -f(b)(b - a) + (f(b) - f(a))b \end{aligned}$$

Método da Falsa Posição

- Determinando x_k :

$$(f(b) - f(a)) x_k = -f(b) (b - a) + (f(b) - f(a)) b$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = -bf(b) + af(b) + bf(b) - bf(a)$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = af(b) - bf(a)$$

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição

- Determinando x_k :

$$(f(b) - f(a)) x_k = -f(b) (b - a) + (f(b) - f(a)) b$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = -bf(b) + af(b) + bf(b) - bf(a)$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = af(b) - bf(a)$$

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição

- Determinando x_k :

$$(f(b) - f(a)) x_k = -f(b) (b - a) + (f(b) - f(a)) b$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = -bf(b) + af(b) + bf(b) - bf(a)$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = af(b) - bf(a)$$

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição

- Determinando x_k :

$$(f(b) - f(a)) x_k = -f(b) (b - a) + (f(b) - f(a)) b$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = -bf(b) + af(b) + bf(b) - bf(a)$$

$$(f(b) - f(a)) x_k = af(b) - bf(a)$$

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição

- ▶ Dado um intervalo $[a, b]$ que contém uma raiz para $f(x) = 0$, então o Método da Falsa Posição pode então ser descrito como

- ▶ Calcula-se a aproximação x_k :

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

- ▶ Determina-se o novo (sub-)intervalo, que será aquele que contém a raiz
 - ▶ $[a, x_k]$, se $f(a)f(x_k) < 0$
 - ▶ $[x_k, b]$, caso contrário
- ▶ A busca continua até o critério de parada ser atendido

Método da Falsa Posição

Entrada: $f(x)$ contínua em $[a, b]$, intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, precisão ϵ e máximo número de iterações

1 **inicio**

2 $k \leftarrow 0$;

3 **enquanto** *critério de parada não é satisfeito* **faça**

4 $x_k \leftarrow \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$;

5 **se** $f(a)f(x_k) < 0$ **então**

6 $b \leftarrow x_k$;

7 **senão**

8 $a \leftarrow x_k$;

9 $k \leftarrow k + 1$;

0 **retorna** x_k

Exemplo

► Exemplo 1

Encontre uma aproximação para o zero da função

$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x)$ no intervalo $[1,5; 2]$ utilizando o Método da Falsa Posição, com $|f(x_k)| < \epsilon = 10^{-4}$.

Revisão

Revisão

- ▶ Método da Falsa Posição
 - ▶ Similar ao Método da Bisseção
 - ▶ $x_k = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

Fontes

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF