Cálculo Numérico

Raízes de Equações

Ana Paula

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG

Sumário

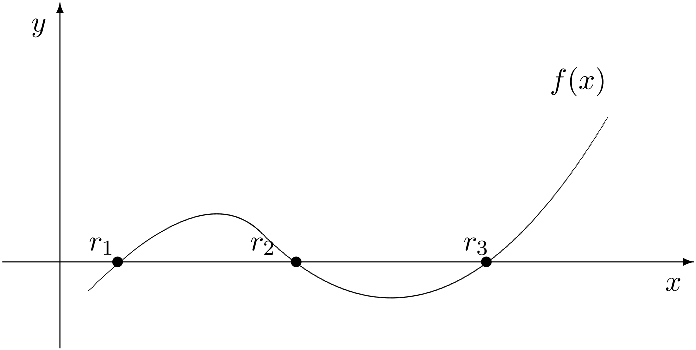
Introdução

Introdução

- Serão estudados aqui métodos numéricos para a resolução do problema de determinar as raízes de uma equação $f(x) = 0$
  - ou, o que é o mesmo, determinar os zeros da função $f(x)$
- Tais raízes podem ser reais ou complexas
  - Considera-se aqui o caso em que f é uma função real de uma variável real x
  - Será estudada somente a determinação de raízes reais

Introdução

- As raízes correspondem aos pontos onde o gráfico da função f(x) intercepta o eixo x



Introdução

- Expressões fechadas existem para alguns polinômios
  - Polinômio Quadrático

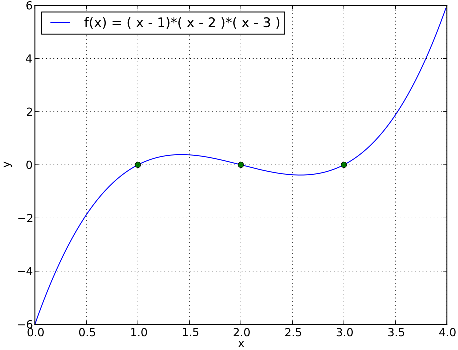
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Como não existe uma forma direta para encontrar os zeros de uma função $f(x)$ qualquer, então recorre-se a métodos aproximados

Introdução

- **Definição (raiz):**
  Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função dada, então um ponto $r \in [a, b]$ é um zero (ou raiz) de f se $f(r) = 0$.

- Exemplo:



Introdução

- Os métodos numéricos estudados aqui seguem as seguintes etapas
  - Isolamento das raízes
    - Encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha apenas uma raiz, ou
    - Determinar uma aproximação inicial x_0
      (ou mais de uma, dependendo do método)
  - Refinamento
    - Gerar uma sequência $\{x_0, x_1, \dots\}$ que convirja para a raiz exata r de $f(x) = 0$

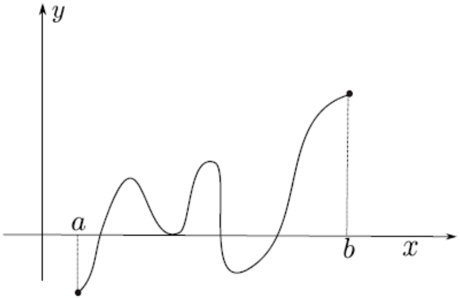
Teorema da Existência

- **Teorema:**
  Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.
- Geometricamente, o teorema afirma que a curva de uma função contínua que começa abaixo do eixo horizontal e termina acima dele, deve cruzar o eixo em algum ponto

Teorema da Existência

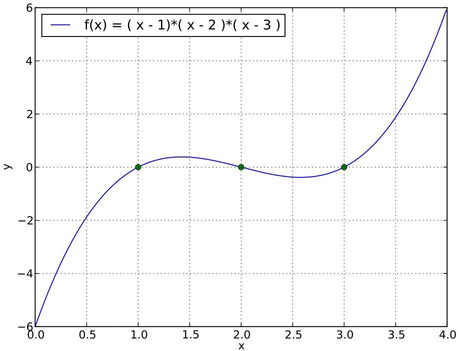
- **Teorema:**
  Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

- Geometricamente, o teorema afirma que a curva de uma função contínua que começa abaixo do eixo horizontal e termina acima dele, deve cruzar o eixo em algum ponto



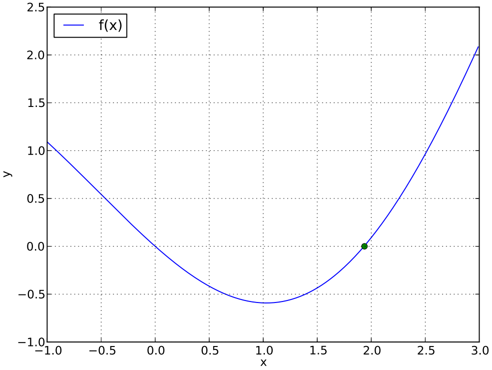
Abordagem gráfica

- Exemplo
  - Existem 3 raízes no intervalo $[0, 4]$
  - Existem 2 raízes no intervalo $[0{,}5; 2{,}5]$
    - Nota-se que $f(0{,}5) = -1.875$ e $f(2{,}5) = -0.375$



Abordagem gráfica

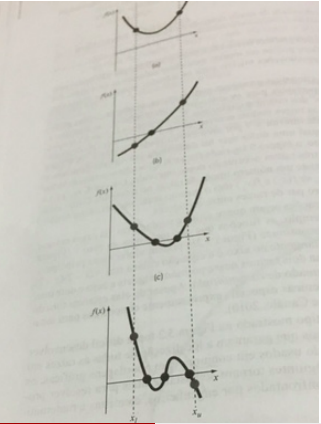
- Como encontrar o intervalo da raiz $r > 0$ de $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \text{sen}(x)$?



- Inspeção visual
  - No exemplo, $r \in [1{,}5; 2]$

Abordagem gráfica

- Além de fornecer estimativas grosseiras para as raízes, as interpretações gráficas são ferramentas importantes para se entender as propriedades das funções e antecipar *armadilhas* dos métodos numéricos.



Busca Incremental

- Outra possibilidade é fazer uma tabela de valores

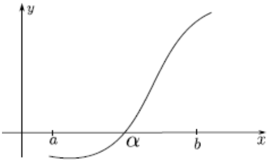
x	$f(x)$	sinal
0,5	-0,416925538604	< 0
1,0	-0,591470984808	< 0
1,5	-0,434994986604	< 0
2,0	0,0907025731743	> 0
2,5	0,964027855896	> 0
3,0	2,10887999194	> 0

- Logo, há ao menos uma raiz em $[1{,}5; 2]$

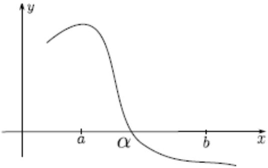
- Outra possibilidade é fixar o início do intervalo $x = a$ e procurar b de modo que $f(a)f(b) < 0$
  - $b = a + h, a + 2h, a + 4h, \dots$

Teorema da Unicidade

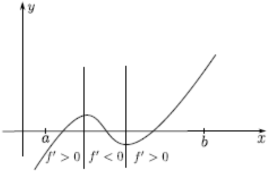
- **Teorema**
  Sob as hipóteses do teorema anterior, se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em $[a, b]$, então o intervalo contém um único zero de $f(x)$.



$f'(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \ \forall x \in [a, b]$



$f'(x)$ não preserva o sinal

Exemplo

- **Exemplo 2**
  Encontre um intervalo de tamanho unitário em que haja ao menos uma raiz para $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ de modo que $x \geq 0$.

Exemplo

- **Exemplo 3**
  Há garantia de haver apenas uma raiz para $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ no intervalo $[1, 2]$?

Critério de Parada

- Definido o intervalo (ou formas de inicialização), pode-se então gerar iterativamente uma sequência de aproximações para a raiz de $f(x)$
- Antes de estudar os métodos numéricos para geração dessas aproximações, é importante definir um critério de parada para o processo iterativo
- Alguns dos critérios normalmente adotados são:

$$\boxed{|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon} \qquad \boxed{\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \epsilon} \qquad \boxed{|f(x_k)| \leq \epsilon}$$

  onde
  - k é o passo do processo iterativo
  - ϵ é a precisão/tolerância da solução
- Pode-se adicionar um número máximo de iterações para evitar que o programa itere indefinidamente

Classes de Métodos

- Métodos Intervalares: São baseados em duas aproximações iniciais que delimitam a raiz, isto é, estão uma de cada lado da raiz.
- Métodos Abertos: Podem evolver uma ou mais aproximações inicias, mas não é necessário que elas delimitem a raiz.

Classes de Métodos

- Para problemas bem condicionados, os métodos intervalares sempre funcionam, porém convergem lentamente. Já os métodos abertos não funcionam sempre (podem divergir), porém, quando funcionam, geralmente convergem de forma mais rápida.
- Em ambos os casos são necessárias aproximações iniciais, que podem surgir do contexto físico analisado. Para os casos em que estimativas iniciais não sejam óbvias, podemos fazer a busca incremental, ou seja, encontrar o intervalo no qual a função muda de sinal.

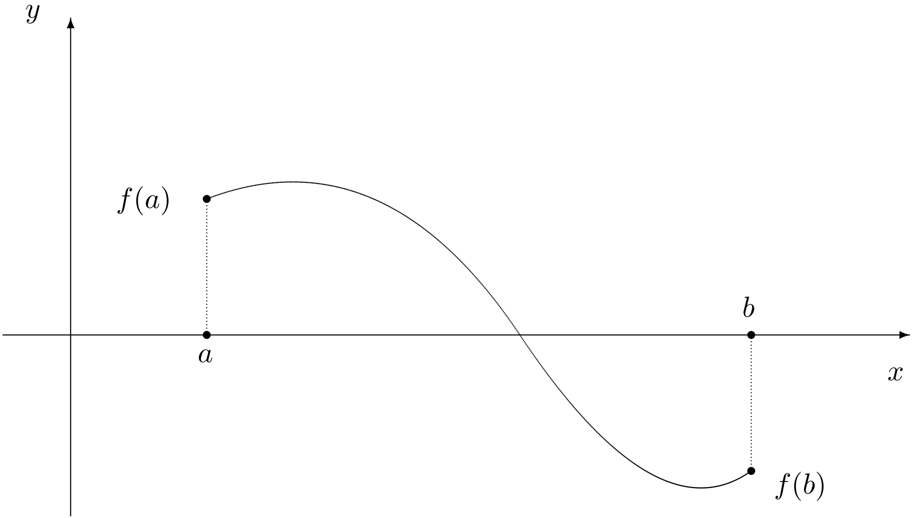
Método da Bisseção

Método da Bisseção

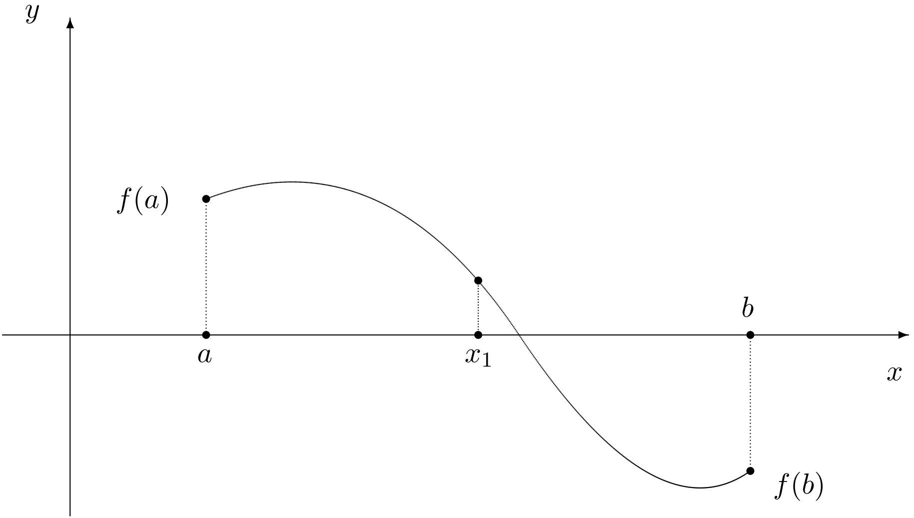
- O método baseia-se na ideia de que seja $f(x)$ contínua e $f(a)f(b) < 0$, então existe ao menos uma raiz no intervalo $[a, b]$
- A cada passo, o intervalo é dividido ao meio
  - $x_k = \frac{a+b}{2}$
- O novo (sub-)intervalo será aquele que contém a raiz
  - $[a, x_k]$, se $f(a)f(x_k) < 0$
  - $[x_k, b]$, caso contrário
- A busca continua até o critério de parada ser atendido

$$b - a \leq \epsilon \qquad |f(x_k)| \leq \epsilon \qquad \frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \epsilon$$

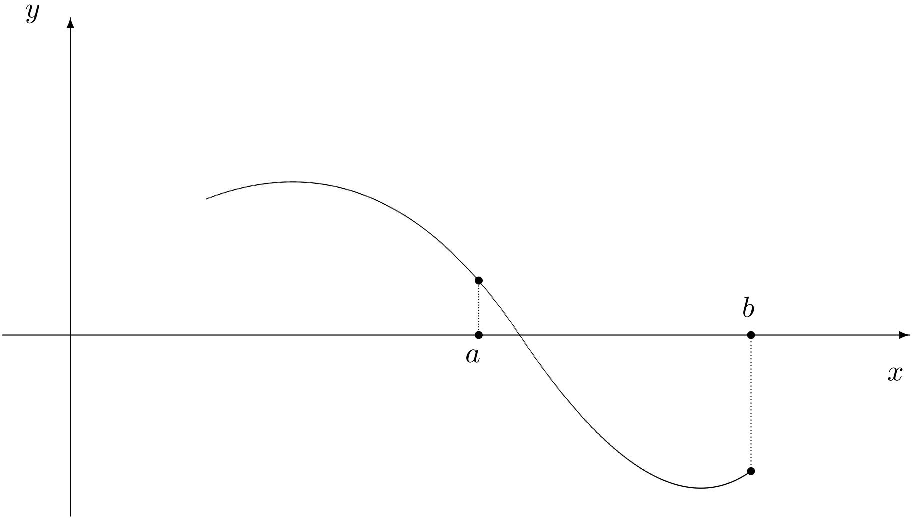
Método da Bisseção



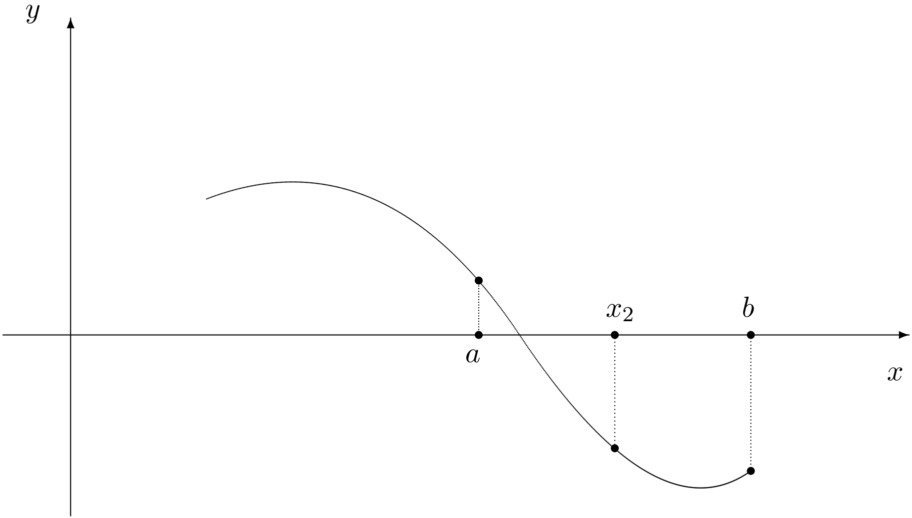
Método da Bisseção



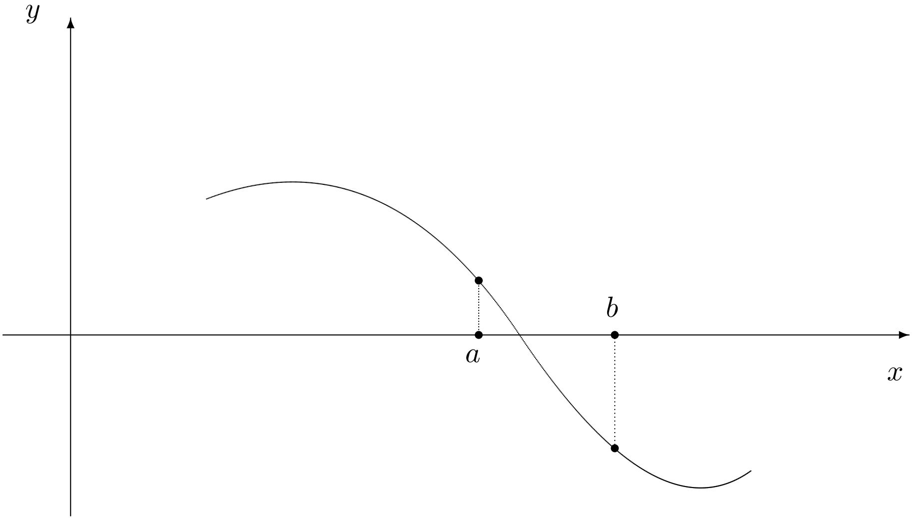
Método da Bisseção



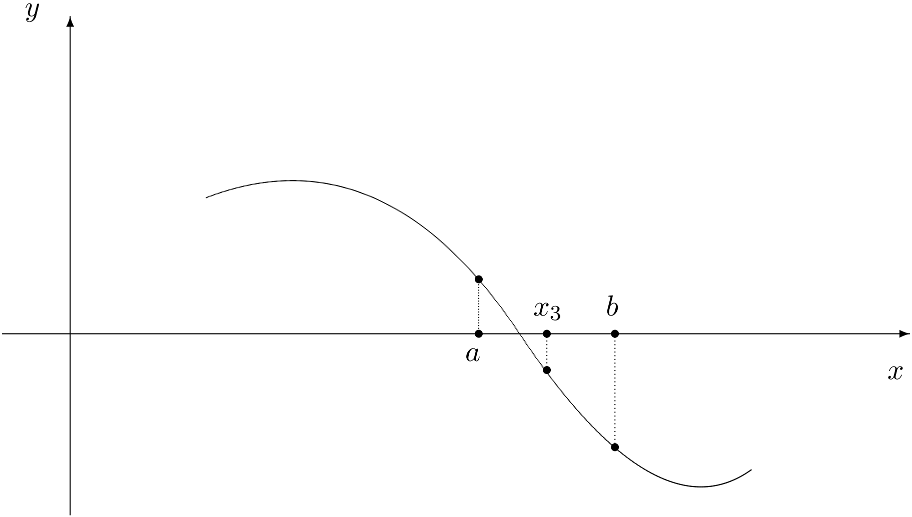
Método da Bisseção



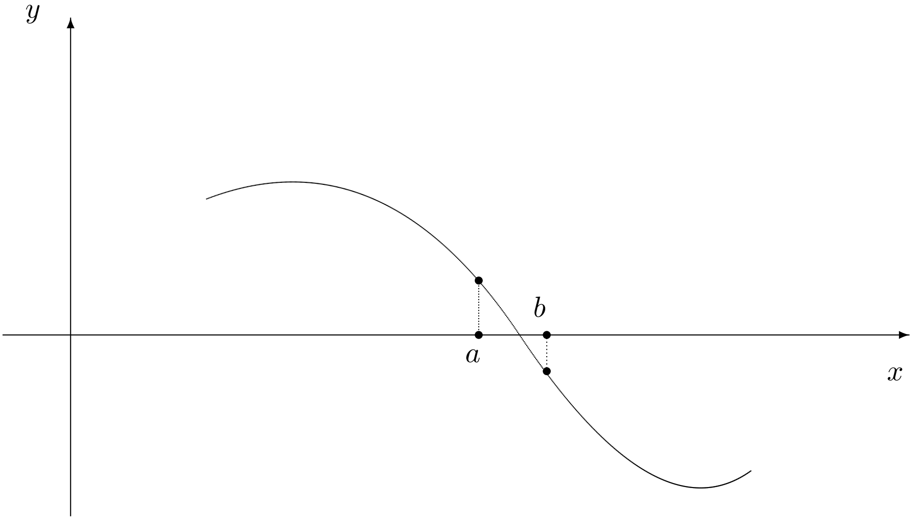
Método da Bisseção



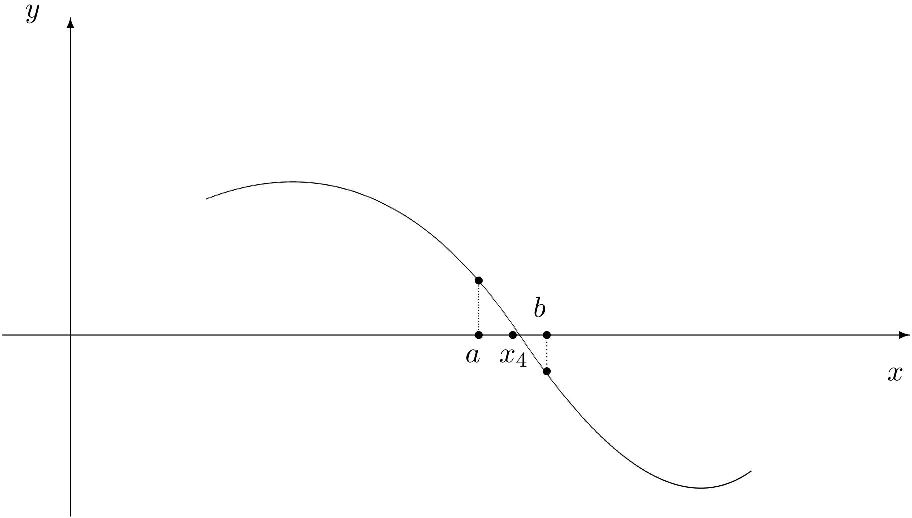
Método da Bisseção



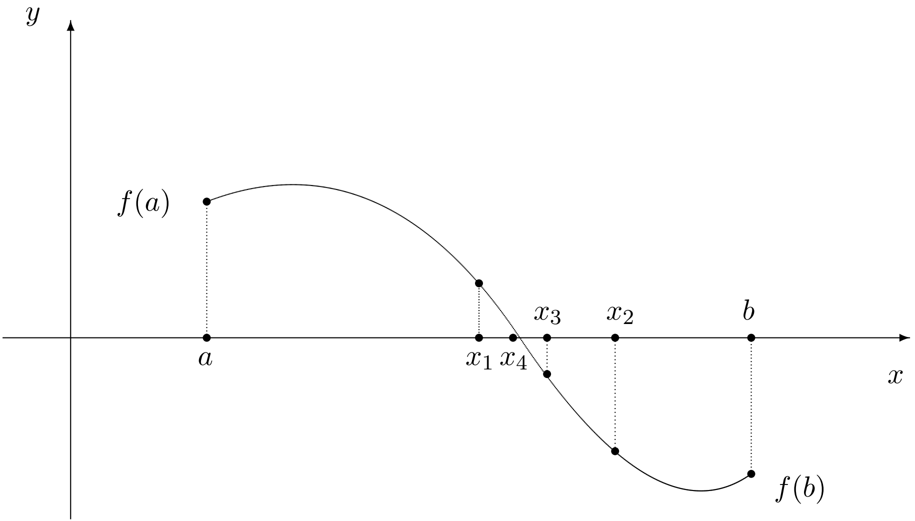
Método da Bisseção



Método da Bisseção



Método da Bisseção



Método da Bisseção

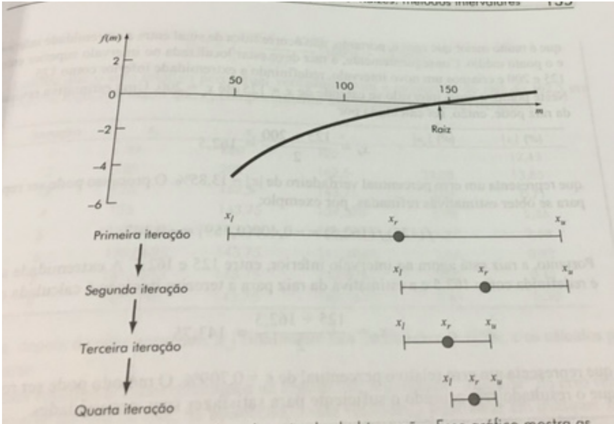


FIGURA 5.5 Descrição gráfica do método da bissecção. Esse gráfico mostra as primeiras quatro iterações para o Exemplo 5.3.

Método da Bisseção

Entrada: $f(x)$ contínua em $[a,b]$, intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, precisão ϵ e máximo número de iterações

inicio
    $k \longleftarrow 0$;
    enquanto *critério de parada não é satisfeito* **faça**
        $x_k \longleftarrow \frac{a+b}{2}$;
        se $f(a)f(x_k) < 0$ **então**
            $b \longleftarrow x_k$;
        senão
            $a \longleftarrow x_k$;
        $k \longleftarrow k + 1$;
    retorna x_k

Exemplo

- **Exemplo 4**
  Encontre uma aproximação para o zero da função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \text{sen}(x)$ no intervalo $[1{,}5; 2]$ executando 5 passos do método da bisseção

Método da Bisseção – Análise

- A cada iteração k, a raiz de $f(x) = 0$ está num intervalo $[a_k, b_k]$
- Assim, sendo r a solução do problema, pode-se dizer que

$$|r - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

- Além disso, o intervalo $(b_k - a_k)$ no passo k pode ser escrito como

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

- Logo, o erro absoluto no passo k satisfaz

$$\boxed{|r - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}}$$

onde a_0 e b_0 são os limites do intervalo original

Método da Bisseção – Análise

- A cada iteração k, a raiz de $f(x) = 0$ está num intervalo $[a_k, b_k]$
- Assim, sendo r a solução do problema, pode-se dizer que

$$|r - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

- Além disso, o intervalo $(b_k - a_k)$ no passo k pode ser escrito como

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

- Logo, o erro absoluto no passo k satisfaz

$$\boxed{|r - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}}$$

onde a_0 e b_0 são os limites do intervalo original

Método da Bisseção – Análise

- A cada iteração k, a raiz de $f(x) = 0$ está num intervalo $[a_k, b_k]$
- Assim, sendo r a solução do problema, pode-se dizer que

$$|r - x_k| \leq \tfrac{1}{2}(b_k - a_k)$$

- Além disso, o intervalo $(b_k - a_k)$ no passo k pode ser escrito como

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

- Logo, o erro absoluto no passo k satisfaz

$$\boxed{|r - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}}$$

onde a_0 e b_0 são os limites do intervalo original

Método da Bisseção – Análise

- O limitante para o erro absoluto pode ser utilizado para determinar o número de iterações necessárias para se obter uma raiz com uma dada precisão ϵ
  - Considerando como critério de parada
$$b - a \leq \epsilon$$
- Nesse sentido, deseja-se determinar k tal que
$$|r - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leq \epsilon$$

Método da Bisseção – Análise

- Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} &\leq \epsilon \\
\frac{b_0 - a_0}{\epsilon} &\leq 2^{k+1} \\
2^{k+1} &\geq \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \\
\log_2(2^{k+1}) &\geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) \\
k + 1 &\geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{k \geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) - 1}$$

ou

$$\boxed{k \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1}$$

Exemplo

- **Exemplo 5**
  Qual o número de iterações necessárias para encontrar uma aproximação para o zero da função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \text{sen}(x)$ no intervalo $[1{,}5; 2]$ de modo que $b - a \leq \epsilon = 10^{-5}$?

Ordem de Convergência

- Uma forma de avaliar o desempenho das técnicas é definir a rapidez com a qual a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \dots\}$ converge para a raiz r
- **Definição (Ordem de Convergência):** Uma sequência $\{x_n \mid n \geq 0\}$ é dita convergir com ordem $p \geq 1$ para um ponto r se

$$|r - x_n| \leq c|r - x_{n-1}|^p$$

para uma constante $c > 0$.

- Sendo $c < 1$, então diz-se que
  - Se $p = 1$: convergência linear
  - Se $1 < p < 2$: convergência super-linear
  - Se $p = 2$: convergência quadrática

Ordem de Convergência

- Uma forma de avaliar o desempenho das técnicas é definir a rapidez com a qual a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots\}$ converge para a raiz r

- **Definição (Ordem de Convergência):** Uma sequência $\{x_n \mid n \geq 0\}$ é dita convergir com ordem $p \geq 1$ para um ponto r se

$$|r - x_n| \leq c|r - x_{n-1}|^p$$

para uma constante $c > 0$.

- Sendo $c < 1$, então diz-se que
  - Se $p = 1$: convergência linear
  - Se $1 < p < 2$: convergência super-linear
  - Se $p = 2$: convergência quadrática

Ordem de Convergência

- Uma forma de avaliar o desempenho das técnicas é definir a rapidez com a qual a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots\}$ converge para a raiz r
- **Definição (Ordem de Convergência):** Uma sequência $\{x_n \mid n \geq 0\}$ é dita convergir com ordem $p \geq 1$ para um ponto r se

$$|r - x_n| \leq c|r - x_{n-1}|^p$$

para uma constante $c > 0$.

- Sendo $c < 1$, então diz-se que
  - Se $p = 1$: convergência linear
  - Se $1 < p < 2$: convergência super-linear
  - Se $p = 2$: convergência quadrática

Método da Bisseção – Ordem de Convergência

- No Método da Bisseção o erro cai pela metade (em média) a cada iteração, ou seja,

$$\frac{|r - x_k|}{|r - x_{k-1}|} \leq \frac{1}{2}$$

Assim,

$$|r - x_k| \leq \frac{1}{2}|r - x_{k-1}|$$

e verifica-se que este método tem ordem de convergência $p = 1$ (linear)

Método da Bisseção – Ordem de Convergência

- No Método da Bisseção o erro cai pela metade (em média) a cada iteração, ou seja,

$$\frac{|r - x_k|}{|r - x_{k-1}|} \leq \frac{1}{2}$$

Assim,

$$|r - x_k| \leq \frac{1}{2}|r - x_{k-1}|$$

e verifica-se que este método tem ordem de convergência $p = 1$ (linear)

Revisão

Revisão

- Introdução
  - Definição de raiz
  - Existência de ao menos uma raiz no intervalo $[a, b]$ quando $f(x)$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$
  - Unicidade da raiz no intervalo
  - Determinação de um intervalo que contenha alguma raiz
  - Critério de parada

Revisão

- Método da Bisseção
  - Utiliza a ideia da existência de ao menos uma raiz no intervalo $[a, b]$ quando $f(x)$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$ (convergência garantida)
  - O intervalo é divido ao meio a cada iteração
  - Limite de erro é obtido diretamente
  - Ordem de convergência linear

Fontes

- Curso de Cálculo Numérico - UFJF