

Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas Lineares

Ana Paula



- 1 Aula Anterior
- 2 Decomposição de Cholesky
- 3 Revisão

Aula Anterior

Aula Anterior

- ▶ Decomposição LU
 - ▶ A matriz de coeficientes é decomposta em $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$
 - ▶ $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal principal unitários
 - ▶ $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior
 - ▶ Substituindo $\mathbf{A}$ por $\mathbf{LU}$ então a solução pode ser obtida resolvendo dois sistemas triangulares
 - ▶ $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
 - ▶ $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
 - ▶ A decomposição não envolve o vetor $\mathbf{b}$

Revisão

- ▶ Decomposição LU com Pivotamento Parcial
 - ▶ Vetor com as permutações das linhas

Decomposição de Cholesky

Decomposição de Cholesky

- ▶ As operações aritméticas da Decomposição LU podem ser simplificadas ao explorar características da matriz de coeficientes
- ▶ A Decomposição de Cholesky leva em conta que A é
 - ▶ simétrica
 - ▶ positiva definida
- ▶ A Decomposição de Cholesky é importante pois muitas matrizes com essas características surgem em aplicações de engenharias e ciências

Decomposição de Cholesky

► **Definição (Matriz Simétrica):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é simétrica se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

► Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

► **Definição (Matriz Positiva Definida):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é positiva definida se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Decomposição de Cholesky

► **Definição (Matriz Simétrica):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é simétrica se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

► Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

► **Definição (Matriz Positiva Definida):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é positiva definida se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Decomposição de Cholesky

► **Definição (Matriz Simétrica):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é simétrica se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

► Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

► **Definição (Matriz Positiva Definida):**

Uma matriz real $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n é positiva definida se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Decomposição de Cholesky

► Verificando se uma matriz é positiva definida

1. Critério de Sylvester:

Uma matriz real e simétrica $\mathbf{A}$ é positiva definida, se e somente se,

$$\det(\mathbf{A}_k) > 0, \forall k = 1, \dots, n,$$

onde $\mathbf{A}_k$ é o menor principal de ordem k da matriz $\mathbf{A}$

2. Uma matriz real $\mathbf{A}$ é positiva definida, se e somente se, todos os pivôs utilizados durante o processo de Eliminação de Gauss sem troca de linha ou coluna forem **positivos**

Decomposição de Cholesky

► Verificando se uma matriz é positiva definida

1. Critério de Sylvester:

Uma matriz real e simétrica $\mathbf{A}$ é positiva definida, se e somente se,

$$\det(\mathbf{A}_k) > 0, \forall k = 1, \dots, n,$$

onde $\mathbf{A}_k$ é o menor principal de ordem k da matriz $\mathbf{A}$

2. Uma matriz real $\mathbf{A}$ é positiva definida, se e somente se, todos os pivôs utilizados durante o processo de Eliminação de Gauss sem troca de linha ou coluna forem **positivos**

Exemplo

► Exemplo 1

Verifique se a matriz que segue é simétrica e positiva definida.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

► Solução:

Como $a_{ij} = a_{ji}$ então $\mathbf{A}$ é simétrica. Além disso,

- $\det(\mathbf{A}_1) = 4 > 0$
- $\det(\mathbf{A}_2) = 11 > 0$
- $\det(\mathbf{A}_3) = 43 > 0$

Logo, $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva definida (SPD)

Exemplo

▶ Exemplo 1

Verifique se a matriz que segue é simétrica e positiva definida.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

▶ Solução:

Como $a_{ij} = a_{ji}$ então $\mathbf{A}$ é simétrica. Além disso,

- ▶ $\det(\mathbf{A}_1) = 4 > 0$
- ▶ $\det(\mathbf{A}_2) = 11 > 0$
- ▶ $\det(\mathbf{A}_3) = 43 > 0$

Logo, $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva definida (SPD)

Exemplo

▶ Exemplo 2

Verifique se a matriz que segue é simétrica e positiva definida.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

▶ Solução:

Como $a_{ij} = a_{ji}$ então $\mathbf{A}$ é simétrica. Além disso,

▶ $\det(\mathbf{A}_1) = 2 > 0$

▶ $\det(\mathbf{A}_2) = 3 > 0$

▶ $\det(\mathbf{A}_3) = 4 > 0$

Logo, $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva definida (SPD)

Exemplo

► Exemplo 2

Verifique se a matriz que segue é simétrica e positiva definida.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

► Solução:

Como $a_{ij} = a_{ji}$ então $\mathbf{A}$ é simétrica. Além disso,

► $\det(\mathbf{A}_1) = 2 > 0$

► $\det(\mathbf{A}_2) = 3 > 0$

► $\det(\mathbf{A}_3) = 4 > 0$

Logo, $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva definida (SPD)

Decomposição de Cholesky

► **Teorema:**

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz real simétrica e positiva definida (SPD), então existe uma única matriz triangular inferior $\mathbf{G}$ com elementos da diagonal principal positivos, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

- Se $\mathbf{A}$ é SPD, então pelo Critério de Sylvester tem-se que

$$\det(\mathbf{A}_k) > 0, \forall k = 1, \dots, n$$

- Portanto, todos os menores principais de $\mathbf{A}$ são não singulares e pelo Teorema da Decomposição LU, tem-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

- Se $\mathbf{A}$ é SPD, então pelo Critério de Sylvester tem-se que

$$\det(\mathbf{A}_k) > 0, \forall k = 1, \dots, n$$

- Portanto, todos os menores principais de $\mathbf{A}$ são não singulares e pelo Teorema da Decomposição LU, tem-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Sendo $\mathbf{A}$ simétrica, então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

► Assim,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

- Sendo $\mathbf{A}$ simétrica, então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- Assim,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{LU} = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Sendo $\mathbf{A}$ simétrica, então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

► Assim,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{LU} = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{LU} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Sendo $\mathbf{A}$ simétrica, então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

► Assim,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{LU} = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{LU} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{L}^T)^{-1}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Sendo $\mathbf{A}$ simétrica, então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

► Assim,

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{L}\mathbf{U})^T = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Nota-se que

► $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$ é uma triangular superior

► $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T$ é triangular inferior

► Logo, $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal

► Assim,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Nota-se que

► $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$ é uma triangular superior

► $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T$ é triangular inferior

► Logo, $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal

► Assim,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Nota-se que

► $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$ é uma triangular superior

► $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T$ é triangular inferior

► Logo, $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal

► Assim,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

- Nota-se que
 - $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$ é uma triangular superior
 - $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T$ é triangular inferior
- Logo, $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal
- Assim,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$$
$$\mathbf{D} \mathbf{L}^T = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T$$

Decomposição de Cholesky

► Demonstração:

► Nota-se que

► $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$ é uma triangular superior

► $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T$ é triangular inferior

► Logo, $\mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal

► Assim,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{L}^T = \mathbf{U} (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{D} \mathbf{L}^T = \mathbf{U}$$

Decomposição de Cholesky

- ▶ **Demonstração:**

- ▶ Resultando em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

- ▶ Como $\mathbf{A}$ é SPD e $\mathbf{L}$ é triangular com elementos da diagonal principal unitários, então

$$d_{ii} > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

- ▶ Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \\ &= \underbrace{\mathbf{L}(\mathbf{D})^{1/2}}_{\mathbf{G}} \underbrace{(\mathbf{D})^{1/2}\mathbf{L}^T}_{\mathbf{G}^T} \\ &= \mathbf{G}\mathbf{G}^T\end{aligned}$$

Decomposição de Cholesky

- ▶ **Demonstração:**

- ▶ Resultando em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

- ▶ Como $\mathbf{A}$ é SPD e $\mathbf{L}$ é triangular com elementos da diagonal principal unitários, então

$$d_{ii} > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

- ▶ Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \\ &= \underbrace{\mathbf{L}(\mathbf{D})^{1/2}}_{\mathbf{G}} \underbrace{(\mathbf{D})^{1/2}\mathbf{L}^T}_{\mathbf{G}^T} \\ &= \mathbf{G}\mathbf{G}^T\end{aligned}$$

Decomposição de Cholesky – Obtendo a Matriz $\mathbf{G}$

- ▶ A matriz $\mathbf{G}$ pode ser obtida pela definição de produto e igualdade de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Os elementos de $\mathbf{G}$ podem então ser determinados a cada coluna j como:
 - ▶ Determina-se o elemento da diagonal g_{jj}
 - ▶ Obtém-se os elementos abaixo de g_{jj}

Decomposição de Cholesky – Obtendo a Matriz C

- ▶ Coluna 1

- ▶ Elemento da diagonal

$$a_{11} = g_{11}^2 \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

- ▶ Elementos abaixo da diagonal

$$a_{21} = g_{21}g_{11} \Rightarrow g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}}$$

$$a_{31} = g_{31}g_{11} \Rightarrow g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} = g_{n1}g_{11} \Rightarrow g_{n1} = \frac{a_{n1}}{g_{11}}$$

Decomposição de Cholesky – Obtendo a Matriz C

► Coluna 2

► Elemento da diagonal

$$a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2 \Rightarrow g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$$

► Elementos abaixo da diagonal

$$a_{32} = g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \Rightarrow g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}}$$

$$a_{42} = g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \Rightarrow g_{42} = \frac{a_{42} - g_{41}g_{21}}{g_{22}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n2} = g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \Rightarrow g_{n2} = \frac{a_{n2} - g_{n1}g_{21}}{g_{22}}$$

Decomposição de Cholesky – Obtendo a Matriz C

► Generalizando para a coluna j

► Elemento da diagonal

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^j g_{jk}^2 \Rightarrow a_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2 + g_{jj}^2 \Rightarrow g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$$

► Elementos abaixo da diagonal (linhas $i > j$)

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \sum_{k=1}^j g_{ik}g_{jk} \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk} + g_{ij}g_{jj} \\
 &\Rightarrow g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}}{g_{jj}}
 \end{aligned}$$

Decomposição de Cholesky – Algoritmo

Entrada: Matriz $\mathbf{A}$, n

1 **inicio**

2 **para** $j = 1, \dots, n$ **faça**

3 $g_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$;

4 **para** $i = j + 1, \dots, n$ **faça**

5 $g_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}{g_{jj}}$;

Algoritmo 1: Decomposição de Cholesky - Complexidade $O(n^3)$

Decomposição de Cholesky

- ▶ Observa-se que
 - ▶ A Decomposição de Cholesky realiza menos operações aritméticas do que a Decomposição LU
 - ▶ Apesar da mesma ordem de complexidade computacional $O(n^3)$
 - ▶ Como a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é positiva definida, então os cálculos de raiz quadrada podem ser realizados
 - ▶ Cálculo do determinante de $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T &\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{G}\mathbf{G}^T) \\ &= \det(\mathbf{G}) \det(\mathbf{G}^T) \\ &= \det(\mathbf{G})^2 \\ &= (g_{11}g_{22} \dots g_{nn})^2\end{aligned}$$

Decomposição de Cholesky

- ▶ Para resolver o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizando a Decomposição de Cholesky
 - ▶ Como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{GG}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$
 - ▶ Faz-se $\mathbf{G}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$
 - ▶ Resolve-se $\mathbf{Gy} = \mathbf{b}$
 - ▶ Resolve-se $\mathbf{G}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$

Exemplo

▶ Exemplo 3

Dado o sistema de equações lineares que segue.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}$$

- ▶ Verifique se a matriz de coeficientes pode ser decomposta usando a Decomposição de Cholesky
- ▶ Decomponha $\mathbf{A}$ em $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$
- ▶ Calcule o determinante de $\mathbf{A}$ utilizando o resultado da decomposição
- ▶ Resolva o sistema linear

Exemplo

► Exemplo 3 – Solução:

- Como $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ então a matriz é simétrica e sendo $\det(\mathbf{A}_1) = 4 > 0$, $\det(\mathbf{A}_2) = 36 > 0$ e $\det(\mathbf{A}_3) = 900 > 0$, então a matriz de coeficientes é SPD e a Decomposição de Cholesky pode ser utilizada
- A decomposição fica como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- $\det(\mathbf{G})^2 = 900$
- Solução do sistema

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

► Exemplo 4

Resolva o sistema linear que segue utilizando a decomposição realizada no exercício anterior.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 78 \end{bmatrix}$$

► Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

► Exemplo 4

Resolva o sistema linear que segue utilizando a decomposição realizada no exercício anterior.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 78 \end{bmatrix}$$

► Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Revisão

- ▶ Decomposição de Cholesky
 - ▶ Sistemas em que a matriz de coeficientes é simétrica e positiva definida
 - ▶ Requer menos operações aritméticas do que a decomposição LU

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?

