Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas Lineares

Ana Paula

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG

Sumário

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

1. Aula Anterior
2. Decomposição LU
3. Decomposição LU com Pivotamento
4. Revisão

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Aula Anterior

Aula Anterior

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Eliminação de Gauss
  - Transforma o sistema linear num sistema equivalente com matriz de coeficientes triangular superior
  - Resolve o sistema equivalente utilizando substituições retroativas
- Eliminação de Gauss com estratégias de pivotamento
  - Evita que o pivô seja nulo e evita efeitos numéricos

Decomposição LU

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

  onde
  - $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária
  - $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior

- Assim,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

- Definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, então pode-se resolver

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \text{(por substituições sucessivas)}$$

- e depois

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad \text{(por substituições retroativas)}$$

Decomposição LU

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

onde
  - $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária
  - $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior

- Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Definindo $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, então pode-se resolver

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{(por substituições sucessivas)}$$

- e depois

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{(por substituições retroativas)}$$

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

  onde
  - $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária
  - $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior

- Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Definindo $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, então pode-se resolver

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{(por substituições sucessivas)}$$

- e depois

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{(por substituições retroativas)}$$

Decomposição LU

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

onde
  - $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária
  - $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior

- Assim,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

- Definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, então pode-se resolver

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \text{(por substituições sucessivas)}$$

- e depois

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad \text{(por substituições retroativas)}$$

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Determinante da Matriz A**

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}) = 1\det(\mathbf{U}) = u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- As matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ podem ser obtidas pela definição de produto e igualdade de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- As matrizes podem então ser obtidas na ordem:
  - 1^a linha de $\mathbf{U}$
  - 1^a coluna de $\mathbf{L}$
  - 2^a linha de $\mathbf{U}$
  - 2^a coluna de $\mathbf{L}$
  - $\vdots$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- 1^a linha de $\mathbf{U}$

$$a_{11} = 1u_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$a_{12} = 1u_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} = 1u_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

- 1^a coluna de $\mathbf{L}$

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
$$a_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} = l_{n1}u_{11} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- 1^a linha de $\mathbf{U}$

$$a_{11} = 1u_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$a_{12} = 1u_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} = 1u_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

- 1^a coluna de $\mathbf{L}$

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
$$a_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} = l_{n1}u_{11} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- 2^a linha de $\mathbf{U}$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + 1u_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$
$$a_{23} = l_{21}u_{13} + 1u_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$
$$\vdots$$
$$a_{2n} = l_{21}u_{1n} + 1u_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21}u_{1n}$$

- 2^a coluna de $\mathbf{L}$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$
$$a_{42} = l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}u_{12}}{u_{22}}$$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- 2^a linha de $\mathbf{U}$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + 1u_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$
$$a_{23} = l_{21}u_{13} + 1u_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$
$$\vdots$$
$$a_{2n} = l_{21}u_{1n} + 1u_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21}u_{1n}$$

- 2^a coluna de $\mathbf{L}$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$
$$a_{42} = l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}u_{12}}{u_{22}}$$

Decomposição LU – Obtenção das Matrizes L e U

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- De forma geral, tem-se que

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}; \quad i \leq j}$$

$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}; \quad i > j}$$

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Entrada: Matriz $\mathbf{A}$, n

inicio

  para $i = 1, \ldots, n$ **faça**

    para $j = i, \ldots, n$ **faça**

      $$u_{ij} \longleftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \;;$$

    para $j = i+1, \ldots, n$ **faça**

      $$l_{ji} \longleftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}}{u_{ii}} \;;$$

Algoritmo 1: Decomposição LU - Complexidade $O(n^3)$

- Na prática, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ podem ser armazenadas sobre a matriz $\mathbf{A}$

Decomposição LU – Via Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- A Eliminação de Gauss pode ser utilizada para decompor $\mathbf{A}$ nas matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$
  - $\mathbf{U}$ é a matriz triangular superior resultante
  - $\mathbf{L}$ é a matriz triangular inferior formada pelos multiplicadores m_{ij} e com diagonal principal unitária

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Passos a serem seguidos:
  - Determine as matrizes L e U a partir da Eliminação de Gauss
  - Resolva o sistema $Ly = b$, usando método de substituições sucessivas;
  - Resolva o sistema $Ux = y$, usando método de substituições retroativas.

Decomposição LU

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Nota-se que
  - A decomposição é realizada com complexidade $O(n^3)$
  - Os sistemas lineares com matrizes de coeficientes triangulares podem ser resolvidos com complexidade $O(n^2)$
  - A vantagem da Decomposição LU é que a matriz $\mathbf{A}$ somente precisa ser decomposta uma vez para resolver diversos sistemas na forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$
$$\vdots$$

Exemplo

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Decomponha a matriz de coeficientes que segue em matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ usando a Eliminação de Gauss.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Decomponha a matriz de coeficientes que segue em matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ usando a Eliminação de Gauss.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Decomponha a matriz de coeficientes que segue em matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ usando a Eliminação de Gauss.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 2**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU e calcule o determinante da matriz de coeficientes utilizando a decomposição.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\det(\mathbf{A}) = u_{11}u_{22}u_{33} = -2$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 2**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU e calcule o determinante da matriz de coeficientes utilizando a decomposição.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\det(\mathbf{A}) = u_{11}u_{22}u_{33} = -2$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 2**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU e calcule o determinante da matriz de coeficientes utilizando a decomposição.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\det(\mathbf{A}) = u_{11}u_{22}u_{33} = -2$$

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Decomposição LU com Pivotamento

Decomposição LU com Pivotamento

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Assim como na Eliminação de Gauss, alguns problemas podem ser evitados ao utilizar estratégias de pivotamento na Decomposição LU
- A estratégia de pivotamento parcial será vista aqui
- O vetor de constantes $\mathbf{b}$ não participa do processo de decomposição
  - As trocas das linhas devem ser aplicadas a ele quando o sistema triangular estiver sendo resolvido
    - Matriz de permutação
    - Vetor de trocas – mais adequado computacionalmente

Decomposição LU com Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Definição (Matriz de Permutação):**
  Uma matriz $\mathbf{P}$ quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida permutando as colunas (ou linhas) da matriz identidade $\mathbf{I}$ de ordem n.

- Seja $\mathbf{P}$ uma matriz de permutação e $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, então
  - $\mathbf{PA}$ é a matriz $\mathbf{A}$ com as linhas permutadas
  - $\mathbf{AP}$ é a matriz $\mathbf{A}$ com as colunas permutadas

Decomposição LU com Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Definição (Matriz de Permutação):**
  Uma matriz $\mathbf{P}$ quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida permutando as colunas (ou linhas) da matriz identidade $\mathbf{I}$ de ordem n.

- Seja $\mathbf{P}$ uma matriz de permutação e $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, então
  - $\mathbf{PA}$ é a matriz $\mathbf{A}$ com as linhas permutadas
  - $\mathbf{AP}$ é a matriz $\mathbf{A}$ com as colunas permutadas

Decomposição LU com Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Por exemplo, sejam

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{1 na coluna 2} \\ \rightarrow \text{1 na coluna 3} \\ \rightarrow \text{1 na coluna 1} \end{array} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- então

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{linha 2 de } \mathbf{A} \\ \rightarrow \text{linha 3 de } \mathbf{A} \\ \rightarrow \text{linha 1 de } \mathbf{A} \end{array}$$

Decomposição LU com Pivotamento

- Por exemplo, sejam

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{1 na coluna 2} \\ \to \text{1 na coluna 3} \\ \to \text{1 na coluna 1} \end{array} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- então

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{linha 2 de } \mathbf{A} \\ \to \text{linha 3 de } \mathbf{A} \\ \to \text{linha 1 de } \mathbf{A} \end{array}$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

- então

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

- Logo, o sistema é resolvido definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ e
  - resolvendo $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$
  - resolvendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- Nota-se que

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{U})$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

- então

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

- Logo, o sistema é resolvido definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ e
  - resolvendo $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$
  - resolvendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- Nota-se que

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{U})$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

- então

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

- Logo, o sistema é resolvido definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ e
  - resolvendo $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$
  - resolvendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- Nota-se que

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{U})$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

- então

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

- Logo, o sistema é resolvido definindo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ e
  - resolvendo $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$
  - resolvendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- Nota-se que

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{U})$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Na prática (implementação)
  - a matriz de permutação $\mathbf{P}$ de ordem n é representada por um vetor $\mathbf{p}$ de ordem n de valores inteiros
  - $\mathbf{p}[k]$ representa o índice da coluna de $\mathbf{P}$ que tem o elemento da k-ésima linha igual a 1
  - $\mathbf{p}$ representa as trocas de linhas da matriz $\mathbf{A}$
- Por exemplo,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ na coluna } 2 \\ \rightarrow 1 \text{ na coluna } 3 \\ \rightarrow 1 \text{ na coluna } 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU com Pivotamento Parcial

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Na prática (implementação)
  - a matriz de permutação $\mathbf{P}$ de ordem n é representada por um vetor $\mathbf{p}$ de ordem n de valores inteiros
  - $\mathbf{p}[k]$ representa o índice da coluna de $\mathbf{P}$ que tem o elemento da k-ésima linha igual a 1
  - $\mathbf{p}$ representa as trocas de linhas da matriz $\mathbf{A}$
- Por exemplo,

$$\mathbf{P} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ na coluna } 2 \\ \rightarrow 1 \text{ na coluna } 3 \\ \rightarrow 1 \text{ na coluna } 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 3**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 3**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- **Exemplo 3**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando a Decomposição LU com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Revisão

Revisão

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Decomposição LU
  - A matriz de coeficientes é decomposta em $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$
  - $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal principal unitários
  - $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior
  - Substituindo $\mathbf{A}$ por $\mathbf{LU}$ então a solução pode ser obtida resolvendo dois sistemas triangulares
    - $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
    - $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
  - A decomposição não envolve o vetor $\mathbf{b}$
  - Decomposição LU com Pivotamento Parcial

Revisão

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Decomposição LU com Pivotamento Parcial
  - Vetor com as permutações das linhas

Dúvidas?

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO