Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas Lineares

Ana Paula

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG

Sumário

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Introdução

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Uma **equação** é dita **linear** se cada termo contém não mais que uma variável e cada variável aparece na primeira potência
- Um **sistema de equações lineares** é um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis
- Um sistema com m equações e n incógnitas é como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- onde
  - $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são os coeficientes
  - $b_i \in \mathbb{R}$ são chamadas constantes
  - $x_j \in \mathbb{R}$ são as variáveis do problema
  - $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- pode ser escrito em notação matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Introdução

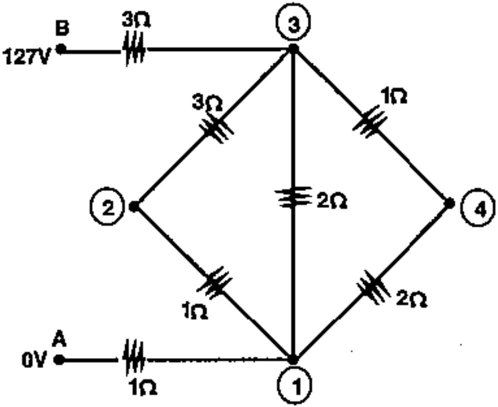
DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Aplicável a uma vasta gama de problemas
  - Análise de estruturas
  - Modelagem de circuitos elétricos
  - Reações Químicas (equilibrar equações)
  - Programação linear e não-linear
  - Aprendizagem de máquina
    - Regressão e classificação
  - Métodos numéricos
    - Interpolação, mínimos quadrados, solução de equações diferenciais

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Exemplo
  Calcular as tensões dos nós do circuito elétrico que segue



Introdução

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

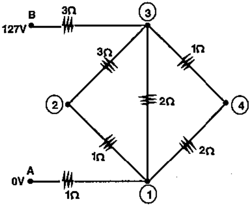
- As seguintes teorias serão utilizadas na modelagem
  - Lei de Kirchhoff
    - A soma das correntes que passam em cada nó é nula
  - Lei de Ohm
    - A corrente do nó i para o nó j é definida como

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

- onde
  - V é a tensão
  - R é a resistência

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

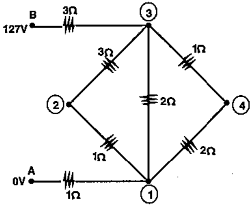


- Nó 1

$$
\begin{aligned}
I_{A1} + I_{21} + I_{31} + I_{41} &= 0 \\
\frac{V_A - V_1}{R_{A1}} + \frac{V_2 - V_1}{R_{21}} + \frac{V_3 - V_1}{R_{31}} + \frac{V_4 - V_1}{R_{41}} &= 0 \\
\frac{0 - V_1}{1} + \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_3 - V_1}{2} + \frac{V_4 - V_1}{2} &= 0 \\
-2V_1 + 2V_2 - 2V_1 + V_3 - V1 + V_4 - V_1 &= 0 \\
-6V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO



- Nó 2

$$3V_1 - 4V_2 + V_3 = 0$$

- Nó 3

$$3V_1 + 2V_2 - 13V_3 + 6V_4 = -254$$

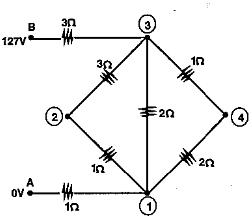
- Nó 4

$$V_1 + 2V_3 - 3V_4 = 0$$

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O circuito elétrico



- pode então ser modelado pelo sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -13 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -254 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

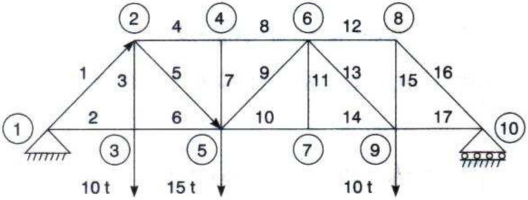
- Resolvendo o sistema obtém-se

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 25{,}80 \\
V_2 &= 31{,}75 \\
V_3 &= 49{,}61 \\
V_4 &= 41{,}67
\end{aligned}
$$

Introdução

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Exemplos:
  Modelo que representa as forças que atuam numa treliça



- Sendo $\alpha = \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$, então para a junção 2

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0 \\ \sum F_y &= -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0 \end{aligned}$$

- Repetindo para os 10 nós, então um sistema linear 17x17 é gerado

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Vetores Linearmente Independentes (LI)
- Um conjunto de vetores $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ é dito ser linearmente independente se

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \cdots + c_n\mathbf{x_n} = \mathbf{0}$$

  somente se $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$
- Caso contrário, diz-se que o conjunto de vetores é linearmente dependente (LD)

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Exemplo

  Os vetores

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

  são LD pois

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \Rightarrow \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Posto de uma Matriz
- O posto (ou *rank*) de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido como o número máximo de vetores linhas (ou de vetores colunas) linearmente independentes de $\mathbf{A}$.
- Nota-se que posto$(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Exemplo
  Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nota-se que
  - $\text{linha}_3 = \text{linha}_1 + \text{linha}_2$
  - linhas 1 e 2 são LI
- Logo, posto$(\mathbf{A}) = 2$
- obs.: o número de colunas LI de uma matriz é igual ao número de linhas LI dessa matriz

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

- Determinante
- Determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar e pode ser obtido como
  - $n = 1$
    $\det(\mathbf{A}) = \det[a_{11}] = a_{11}$
  - $n > 1$
    $\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{M}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{M}_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(\mathbf{M}_{1n})$
    onde M_{ij} é a matriz resultante da remoção da linha i e coluna j da matriz $\mathbf{A}$

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

- Definição: Matriz Singular
  Uma matriz $\mathbf{A}$ com $\det(\mathbf{A}) = 0$ é dita singular.
  Quando $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ então $\mathbf{A}$ é dita não-singular.

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Calcular o determinante de uma matriz com dimensão $n = 3$

- Solução:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{matrix}$$

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Calcular o determinante de uma matriz com dimensão $n = 3$

- Solução:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{array}$$

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Inversa de uma Matriz
  A inversa de uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é representada por $\mathbf{A}^{-1}$ e é definida de forma que

  $$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

  onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n

Alguns Conceitos de Álgebra Linear

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Exemplo
- Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Verifica-se que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Sistemas Lineares

Classificação dos Sistemas Lineares

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Considerando um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se as seguintes possibilidades quanto ao número de soluções:

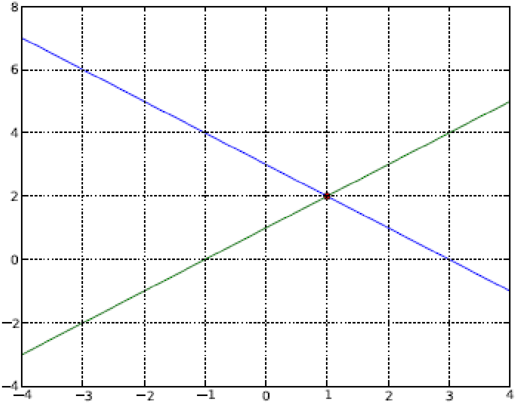
  1. Solução única (consistente e determinado)
  2. Infinitas soluções (consistente e indeterminado)
  3. Nenhuma solução (inconsistente)

Classificação dos Sistemas Lineares

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Caso (1): solução única

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

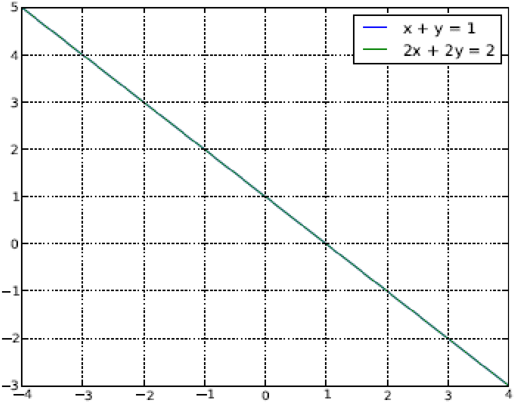


Classificação dos Sistemas Lineares

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Caso (2): infinitas soluções

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-\theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

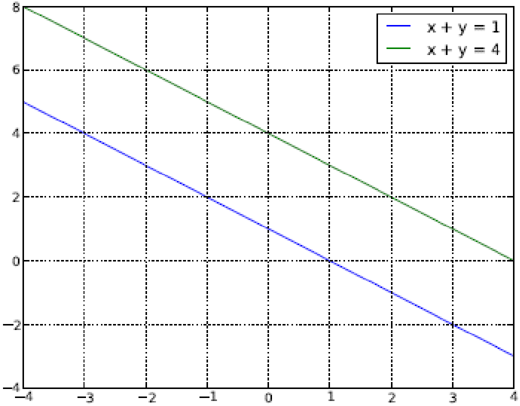


Classificação dos Sistemas Lineares

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Caso (3): sem solução

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists \mathbf{x} \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Existência e Unicidade da Solução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Teorema: Existência e Unicidade da Solução
  Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

  1. $\mathbf{A}^{-1}$ existe
  2. A única solução do sistema homogêneo $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ é $\mathbf{y}$ ser o vetor nulo
  3. posto$(\mathbf{A}) = n$
  4. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
  5. dado qualquer vetor $\mathbf{b}$, existe exatamente um vetor $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Existência e Unicidade da Solução

- **Exemplo 2**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 1).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = -2 \neq 0$ então existe solução e ela é única

Existência e Unicidade da Solução

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 2**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 1).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = -2 \neq 0$ então existe solução e ela é única

Existência e Unicidade da Solução

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 3**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 2).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = 0$ então o sistema não tem solução ou a solução não é única

Existência e Unicidade da Solução

- **Exemplo 3**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 2).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = 0$ então o sistema não tem solução ou a solução não é única

Existência e Unicidade da Solução

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 4**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 3).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = 0$ então o sistema não tem solução ou a solução não é única

Existência e Unicidade da Solução

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 4**
  Verifique se o sistema linear que segue tem solução única (caso 3).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

- Solução:
  Como $\det(\mathbf{A}) = 0$ então o sistema não tem solução ou a solução não é única

Métodos Computacionais

Métodos Computacionais

- Serão estudados métodos computacionais para encontrar a solução do sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- Considera-se aqui que $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e não-singular
- Os métodos computacionais podem ser divididos em
  - Métodos diretos
    - Fornecem a solução exata do problema, a menos de erros de arredondamento, após um número finito de operações
  - Métodos iterativos
    - Geram uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial e, sob certas condições, essa sequência converge para a solução do problema

Métodos Computacionais

- Métodos diretos
  - Sistemas triangulares: substituições sucessivas e retroativas
  - Eliminação de Gauss
    - Estratégias de pivotamento
  - Decomposição LU
    - Estratégias de pivotamento
  - Decomposição de Cholesky e $\mathbf{LDL}^T$
- Métodos iterativos
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
  - Métodos de Relaxação

Regra de Cramer

- Calcula as variáveis por meio de determinantes
- Exemplo:
  Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

- então a solução pode ser obtida fazendo

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

- Computacionalmente caro
  - Requer que $n + 1$ determinantes sejam calculados

Inversa de $\mathbf{A}$

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Pode-se utilizar $\mathbf{A}^{-1}$
- Uma vez calculada a inversa da matriz de coeficientes, então

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

- Sendo o objetivo resolver o sistema então existem alternativas mais eficientes computacionalmente

Sistemas Triangulares

Sistemas Triangulares Inferiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A}$ é triangular inferior, ou seja,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistemas Triangulares Inferiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O sistema pode ser resolvido fazendo

$$l_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

$$\vdots$$

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_2 - (l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{n,n-1}x_{n-1})}{l_{nn}}$$

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n}$$

- Método de substituições sucessivas

Sistemas Triangulares Inferiores

Data: n, L, b

begin

  $x[1] \longleftarrow b[1]/L[1][1]$;

  for $i = 2, \ldots, n$ **do**

    $soma \longleftarrow 0$;

    for $j = 1, \ldots, i-1$ **do**

      $soma \longleftarrow soma + L[i][j] * x[j]$;

    $x[i] \longleftarrow (b[i] - soma)/L[i][i]$;

Algoritmo 1: Substituições sucessivas - Complexidade $O(n^2)$

Sistemas Triangulares Inferiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 5**
  Resolver o sistema linear que segue.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Resolução:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 5$$

$$x_4 = 3$$

Sistemas Triangulares Inferiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 5**
  Resolver o sistema linear que segue.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Resolução:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 5$$

$$x_4 = 3$$

Sistemas Triangulares Superiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A}$ é triangular superior, ou seja,

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistemas Triangulares Superiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O sistema pode ser resolvido por substituições retroativas fazendo

$$u_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$u_{11}x_1 + \cdots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n = b_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - (u_{12}x_2 + \cdots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n)}{u_{11}}$$

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = n, \ldots, 1}$$

Sistemas Triangulares Superiores

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Data: n, U, b

begin
    $x[n] \longleftarrow b[n]/U[n][n]$;
    for $i = n-1, \ldots, 1$ **do**
        $soma \longleftarrow 0$;
        for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
            $soma \longleftarrow soma + U[i][j] * x[j]$;
        $x[i] \longleftarrow (b[i] - soma)/U[i][i]$;

Algoritmo 2: Substituições retroativas - Complexidade $O(n^2)$

Sistemas Triangulares Superiores - Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 6**
  Resolver o sistema linear que segue.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Resolução:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = 4, \ldots, 1$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 4$$

Sistemas Triangulares Superiores - Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 6**
  Resolver o sistema linear que segue.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Resolução:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = 4, \ldots, 1$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 4$$

Revisão

Revisão

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Introdução
- Alguns Conceitos de Álgebra Linear
- Sistemas Lineares
  - Classificação
  - Existência e unicidade de solução
- Métodos Computacionais
  - Métodos Diretos
  - Métodos Iterativos

Revisão

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Sistemas Triangulares
  - Substituições Sucessivas

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

  - Substituições Retroativas

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = n, \ldots, 1$$

Fontes

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?