Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas Lineares

Ana Paula

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG

Sumário

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Aula Anterior

Aula Anterior

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Introdução
- Alguns Conceitos de Álgebra Linear
- Sistemas Lineares
  - Classificação
  - Existência e unicidade de solução
- Métodos Computacionais
  - Métodos Diretos
  - Métodos Iterativos

Aula Anterior

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Sistemas Triangulares
  - Substituições Sucessivas

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

  - Substituições Retroativas

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = n, \ldots, 1$$

Eliminação de Gauss

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O sistema é transformado em um sistema equivalente com a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ sendo triangular superior
  - Operações elementares são utilizadas para zerar os elementos abaixo da diagonal principal da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$
- Ilustração do procedimento:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & b \\ 0 & a & a & a & b \\ 0 & a & a & a & b \\ 0 & a & a & a & b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & b \\ 0 & a & a & a & b \\ 0 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & a & a & b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & b \\ 0 & a & a & a & b \\ 0 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$$

- Finalmente, o sistema resultante pode ser resolvido por meio de substituições retroativas

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Definição (Sistema Equivalente):**
  Dois sistemas de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ são equivalentes quando possuem a mesma solução $\mathbf{x}^*$.

- **Teorema:**
  Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. Um sistema $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ equivalente pode ser obtido aplicando as seguintes operações elementares:
  - trocar a ordem de duas equações
  - multiplicar uma equação por uma constante não nula
  - somar uma equação com um múltiplo de outra

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Definição (Sistema Equivalente):**
  Dois sistemas de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ são equivalentes quando possuem a mesma solução $\mathbf{x}^*$.

- **Teorema:**
  Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. Um sistema $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ equivalente pode ser obtido aplicando as seguintes operações elementares:

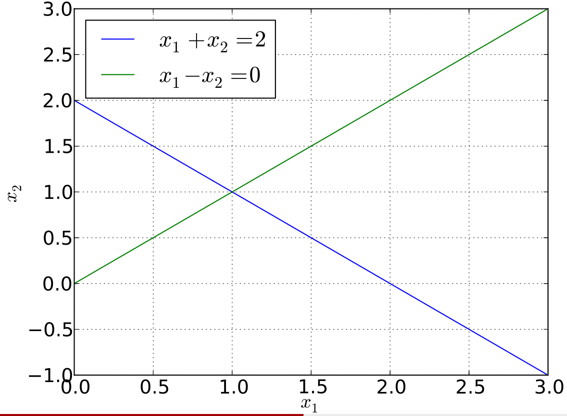
  - trocar a ordem de duas equações
  - multiplicar uma equação por uma constante não nula
  - somar uma equação com um múltiplo de outra

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Por exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

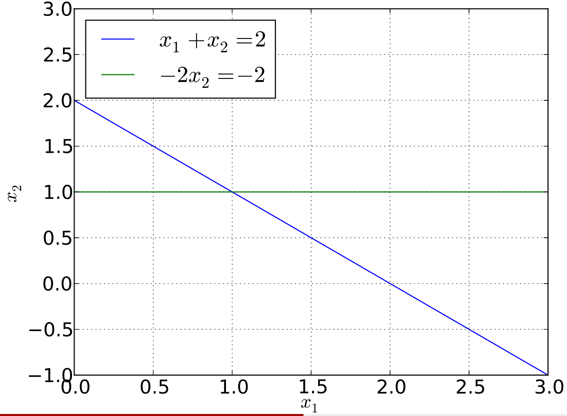


Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Fazendo $L_2' = L_2 - L_1$, obtém-se o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 2 \\ \quad -2x_2 = -2 \end{cases}$$



Eliminação de Gauss

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Seja o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ representado por uma matriz estendida na forma

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

- Os passos que seguem podem ser realizados para obter um sistema linear equivalente com a matriz de coeficientes triangular superior

Eliminação de Gauss

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo 1** (k=1): os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna são eliminados fazendo

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad \text{(supõem-se que } a_{11} \neq 0\text{)}$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$
$$\vdots$$
$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}},$$

- ou seja,

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}; \quad i = 2, \ldots, n$$

- O elemento utilizado nos denominadores é chamado de pivô
  - a_{11}, neste caso

Eliminação de Gauss

- **Passo 1** (k=1): os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna são eliminados fazendo

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad \text{(supõem-se que } a_{11} \neq 0\text{)}$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$
$$\vdots$$
$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}},$$

- ou seja,

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}; \quad i = 2, \ldots, n$$

- O elemento utilizado nos denominadores é chamado de pivô
  - a_{11}, neste caso

Eliminação de Gauss

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo 1** (k=1): os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna são eliminados fazendo

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad \text{(supõem-se que } a_{11} \neq 0\text{)}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}},$$

- ou seja,

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}; \quad i = 2, \ldots, n$$

- O elemento utilizado nos denominadores é chamado de pivô
  - a_{11}, neste caso

Eliminação de Gauss

- **Passo 1** (k=1): os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna são eliminados fazendo

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad \text{(supõem-se que } a_{11} \neq 0)$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}},$$

- ou seja,

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}; \quad i = 2, \dots, n$$

- O elemento utilizado nos denominadores é chamado de pivô
  - a_{11}, neste caso

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(1)} = L_i^{(0)} - m_{i1} L_1^{(0)}; \qquad L_i^{(k)} \text{ é a linha } i \text{ no passo } k$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)}; \quad j = 1, \ldots, n$$
$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)}$$

- Assim, após a primeira etapa tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(1)} = L_i^{(0)} - m_{i1} L_1^{(0)}; \qquad L_i^{(k)} \text{ é a linha } i \text{ no passo } k$$

- ou seja,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)}; \quad j = 1, \dots, n \\ b_i^{(1)} &= b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} \end{aligned}$$

- Assim, após a primeira etapa tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(1)} = L_i^{(0)} - m_{i1} L_1^{(0)}; \qquad L_i^{(k)} \text{ é a linha } i \text{ no passo } k$$

- ou seja,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)}; \quad j = 1, \ldots, n \\ b_i^{(1)} &= b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} \end{aligned}$$

- Assim, após a primeira etapa tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

- **Passo 2** (k=2): os elementos abaixo da diagonal principal na coluna 2 são eliminados fazendo

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}; \quad i = 3, \dots, n \text{ e assumindo } a_{22} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}; \quad j = 2, \dots, n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)}$$

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo 2** (k=2): os elementos abaixo da diagonal principal na coluna 2 são eliminados fazendo

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}; \quad i = 3, \ldots, n \text{ e assumindo } a_{22} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}; \quad j = 2, \ldots, n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)}$$

Eliminação de Gauss

- **Passo 2** (k=2): os elementos abaixo da diagonal principal na coluna 2 são eliminados fazendo

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}; \quad i = 3, \dots, n \text{ e assumindo } a_{22} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}; \quad j = 2, \dots, n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)}$$

Eliminação de Gauss

DCC DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo 2** (k=2): os elementos abaixo da diagonal principal na coluna 2 são eliminados fazendo

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}; \quad i = 3, \ldots, n \text{ e assumindo } a_{22} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}; \quad j = 2, \ldots, n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)}$$

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- Assim, após a segunda etapa tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

- O procedimento é então repetido até o passo $n-1$

Eliminação de Gauss

- Assim, após a segunda etapa tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

- O procedimento é então repetido até o passo $n-1$

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \ldots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \ldots, n$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

- Nota-se que as linhas $1, \ldots, k$ não são alteradas

- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \ldots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \ldots, n$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

- Nota-se que as linhas $1, \ldots, k$ não são alteradas
- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \ldots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \ldots, n$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

- Nota-se que as linhas $1, \ldots, k$ não são alteradas
- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \dots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \dots, n$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

- Nota-se que as linhas $1, \dots, k$ não são alteradas
- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \ldots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \ldots, n$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

- Nota-se que as linhas $1, \ldots, k$ não são alteradas

- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Passo k** (k=1, . . . , n-1):

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}; \quad i = k+1, \ldots, n \text{ e supondo } a_{kk} \neq 0$$

- Em seguida faz-se

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k-1)} - m_{ik} L_k^{(k-1)}$$

- ou seja,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}; \quad j = k, \ldots, n \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)} \end{aligned}$$

- Nota-se que as linhas $1, \ldots, k$ não são alteradas
- Por fim, aplica-se o método de substituições retroativas ao sistema equivalente

Eliminação de Gauss

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Entrada: Matriz $\mathbf{A}$, vetor $\mathbf{b}$, n

inicio
    para $k = 1, \ldots, n-1$ **faça** `/* Para cada passo */`
        para $i = k+1, \ldots, n$ **faça** `/* Linhas abaixo da k-ésima */`
            $m \longleftarrow \mathbf{A}[i][k]/\mathbf{A}[k][k]$;
            para $j = k, \ldots, n$ **faça** `/* Colunas */`
                $\mathbf{A}[i][j] \longleftarrow \mathbf{A}[i][j] - m * \mathbf{A}[k][j]$;
            $\mathbf{b}[i] \longleftarrow \mathbf{b}[i] - m * \mathbf{b}[k]$;
    $\mathbf{x} \longleftarrow$ retroSubstituicao$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, n)$; `/* Resolve o sistema */`
    retorna $\mathbf{x}$

Algoritmo 1: Eliminação de Gauss - Complexidade $O(n^3)$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 1**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- **Exemplo 1**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exercício

- **Exercício 1**
  Resolva o sistema linear que segue utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Estratégias de Pivotamento

Estratégias de Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O Método de Eliminação de Gauss requer o calculo de $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
- O pivô a_{kk} pode ser escolhido adequadamente
- Estratégias de pivotamento ajudam a evitar
  - que o pivô seja nulo
  - a propagação de erros numéricos
    - se a_{kk} for um número muito pequeno (em módulo), o multiplicador m_{ik} pode ficar muito grande, ampliando erros de arredondamento ao multiplicar m_{ik} ou gerando erros ao subtrair/somar números pequenos de grandes
- O pivotamento garante que $|m_{ik}| \leq 1$
- Existem duas formas de pivotamento
  - Pivotamento Parcial
  - Pivotamento Total

Estratégias de Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O Método de Eliminação de Gauss requer o calculo de $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
- O pivô a_{kk} pode ser escolhido adequadamente
- Estratégias de pivotamento ajudam a evitar
  - que o pivô seja nulo
  - a propagação de erros numéricos
    - se a_{kk} for um número muito pequeno (em módulo), o multiplicador m_{ik} pode ficar muito grande, ampliando erros de arredondamento ao multiplicar m_{ik} ou gerando erros ao subtrair/somar números pequenos de grandes
- O pivotamento garante que $|m_{ik}| \leq 1$
- Existem duas formas de pivotamento
  - Pivotamento Parcial
  - Pivotamento Total

Estratégias de Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O Método de Eliminação de Gauss requer o calculo de $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
- O pivô a_{kk} pode ser escolhido adequadamente
- Estratégias de pivotamento ajudam a evitar
  - que o pivô seja nulo
  - a propagação de erros numéricos
    - se a_{kk} for um número muito pequeno (em módulo), o multiplicador m_{ik} pode ficar muito grande, ampliando erros de arredondamento ao multiplicar m_{ik} ou gerando erros ao subtrair/somar números pequenos de grandes
- O pivotamento garante que $|m_{ik}| \leq 1$
- Existem duas formas de pivotamento
  - Pivotamento Parcial
  - Pivotamento Total

Estratégias de Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O Método de Eliminação de Gauss requer o calculo de $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
- O pivô a_{kk} pode ser escolhido adequadamente
- Estratégias de pivotamento ajudam a evitar
  - que o pivô seja nulo
  - a propagação de erros numéricos
    - se a_{kk} for um número muito pequeno (em módulo), o multiplicador m_{ik} pode ficar muito grande, ampliando erros de arredondamento ao multiplicar m_{ik} ou gerando erros ao subtrair/somar números pequenos de grandes
- O pivotamento garante que $|m_{ik}| \leq 1$
- Existem duas formas de pivotamento
  - Pivotamento Parcial
  - Pivotamento Total

Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- No início de cada passo k

  procura-se r tal que $|a_{rk}| = \max_{i \in [k,n]} |a_{ik}|$

- Em seguida, as linhas k e r são trocadas e o algoritmo continua
- Ou seja, o pivô é escolhido de modo que seja o elemento de maior valor absoluto na coluna k
  - considerando as linhas ($i \geq k$) que ainda podem ser operadas
- Nota-se que se houver apenas candidatos a pivô nulos então
  - $\det(\mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}$ é singular $\Rightarrow \mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- No início de cada passo k

  procura-se r tal que $|a_{rk}| = \max_{i \in [k,n]} |a_{ik}|$

- Em seguida, as linhas k e r são trocadas e o algoritmo continua
- Ou seja, o pivô é escolhido de modo que seja o elemento de maior valor absoluto na coluna k
  - considerando as linhas $(i \geq k)$ que ainda podem ser operadas
- Nota-se que se houver apenas candidatos a pivô nulos então
  - $\det(\mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}$ é singular $\Rightarrow \mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Pivotamento Parcial

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- No início de cada passo k

  procura-se r tal que $|a_{rk}| = \max\limits_{i \in [k,n]} |a_{ik}|$

- Em seguida, as linhas k e r são trocadas e o algoritmo continua
- Ou seja, o pivô é escolhido de modo que seja o elemento de maior valor absoluto na coluna k
  - considerando as linhas $(i \geq k)$ que ainda podem ser operadas
- Nota-se que se houver apenas candidatos a pivô nulos então
  - $\det(\mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}$ é singular $\Rightarrow \mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Pivotamento Parcial

- No início de cada passo k

  procura-se r tal que $|a_{rk}| = \max_{i \in [k,n]} |a_{ik}|$

- Em seguida, as linhas k e r são trocadas e o algoritmo continua
- Ou seja, o pivô é escolhido de modo que seja o elemento de maior valor absoluto na coluna k
  - considerando as linhas $(i \geq k)$ que ainda podem ser operadas
- Nota-se que se houver apenas candidatos a pivô nulos então
  - $\det(\mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}$ é singular $\Rightarrow \mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Exemplo

- **Exemplo 2** Resolva esse sistema linear via o Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- **Exemplo 2** Resolva esse sistema linear via o Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- **Exemplo 2** Resolva esse sistema linear via o Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

- **Exercício 2**
  As operações aritméticas devem ser realizadas numa máquina $F(10, 3, -10, 10)$ com arredondamento e com representação para o zero. Ao resolver o sistema linear que segue utilizando o Método de Eliminação de Gauss sem Pivotamento obtém-se $\mathbf{x^T} = [0 \ \ 2{,}5]$ (verifique). Entretanto, essa solução é inválida. Resolva o sistema usando o Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\begin{bmatrix} 0{,}0002 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pivotamento Total

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O pivô é o maior elemento (em módulo) entre os que ainda atuam no processo de eliminação
- No início de cada passo k

  procura-se a linha r e a coluna s tal que $|a_{rs}| = \max_{i \in [k,n], j \in [k,n]} |a_{ij}|$

- Em seguida, as linhas k e r, e as colunas k e s são trocadas e o algoritmo continua
- Observações
  - a troca das colunas afeta a ordem das variáveis
  - o pivotamento total não é muito adotado por causa do alto esforço computacional requerido na busca pelo pivô
  - o pivotamento parcial é geralmente satisfatório

Pivotamento Total

- O pivô é o maior elemento (em módulo) entre os que ainda atuam no processo de eliminação
- No início de cada passo k

  procura-se a linha r e a coluna s tal que $|a_{rs}| = \max_{i \in [k,n], j \in [k,n]} |a_{ij}|$

- Em seguida, as linhas k e r, e as colunas k e s são trocadas e o algoritmo continua
- Observações
  - a troca das colunas afeta a ordem das variáveis
  - o pivotamento total não é muito adotado por causa do alto esforço computacional requerido na busca pelo pivô
  - o pivotamento parcial é geralmente satisfatório

Pivotamento Total

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- O pivô é o maior elemento (em módulo) entre os que ainda atuam no processo de eliminação
- No início de cada passo k

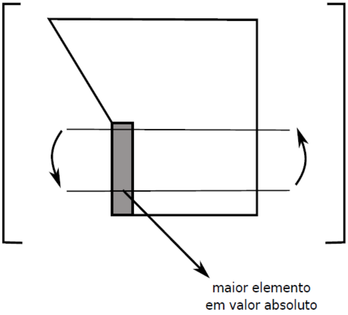
  procura-se a linha r e a coluna s tal que $|a_{rs}| = \max\limits_{i \in [k,n], j \in [k,n]} |a_{ij}|$

- Em seguida, as linhas k e r, e as colunas k e s são trocadas e o algoritmo continua
- Observações
  - a troca das colunas afeta a ordem das variáveis
  - o pivotamento total não é muito adotado por causa do alto esforço computacional requerido na busca pelo pivô
  - o pivotamento parcial é geralmente satisfatório

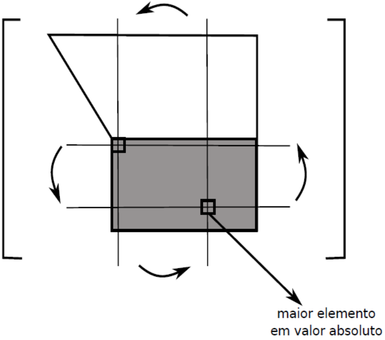
Estratégias de Pivotamento

DCC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Pivotamento Parcial



Pivotamento Total



Revisão

Revisão

- Eliminação de Gauss
  - Transforma o sistema linear num sistema equivalente com matriz de coeficientes triangular superior
  - Resolve o sistema equivalente utilizando substituições retroativas
- Eliminação de Gauss com estratégias de pivotamento
  - Evita que o pivô seja nulo e evita efeitos numéricos

Fontes

- Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO