Exercícios de AN: Junho de 2012

Renato Assunção - DCC, UFMG

1. O código abaixo implementa em scilab o algoritmo da bisseção.
   - O código possui duas linhas com erro. Encontre-os.
   - Explique a ação dos três primeiros IFs.
   - Explique qual é o critério de parada do algoritmo. Modifique-o para que o algortmo pare quando a diferença relativa entre as aproximações sucessivas x_n e x_{n+1} for menos que $10 - 3$. Isto é, parar se $|x_{n+1} - x_n|/x_{n+1} < 0.001$.

```
function [x] = bissecao(a,b,f)
    // metodo da bissecao para encontrar raiz de equacao nao-linear f(x)=0
    N=100; eps=1.e-5; // define max iteracoes e erro
    if(f(a)*f(b)>0) then
        error("f(a) e f(b) possuem o mesmo sinal")
        abort;
    end;
    if(abs(f(a)) < eps) then
        error("solucao eh a")
        abort;
    end;
    if(abs(f(b)) < eps) then
        error("solucao eh a")
        abort;
    end;
    while ( N > 0 )
        c = (a+b)/2;
        if(abs(f(c)) < eps) then
            x = c;
            x
            return;
        end;
        if( f(a)*f(c) < 0 ) then
            a = c;
        else
            b = c;
        end;
        N = N - 1;
    end;
    error("Metodo nao convergiu")
    abort;
endfunction
```

2. Se você corrigiu os erros da implementação acima, execute o código com o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ com os intervalos $(2, 3)$ e $(1, 2)$. O segundo intervalo deve gerar uma mensagem de erro. Para isto, use o comando `deff` para definir a função a ser passada como argumento da função `bissecao`. DICA:

```
\texttt{deff("[y]=p(x)", ["y=x^3-2*x^2-2*x-1"])}.
exec("bissecao.sci",-1);
x = bissecao(2,3,p)
```

3. Modifique a função `bissecao` alterando o número máximo de iterções para $N = 2$. Execute novamente a função com o intervalo $(2, 3)$ para verificar se as iterações são interrompidas e a mensagem `Metodo nao convergiu` é emitida.

4. Trace um gráfico da função $f(x) = x^2 - 4\sin(x)$ no intervalo $[-3, 10]$. Verifique que existe apenas uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[1, 3]$ e use a função `bissecao` para encontrá-la.

5. O código abaixo é uma implementação em scilab do algoritmo de Newton-Raphson para encontrar raízes de uma equação não-linear.

```
function [x] =newtonraphson(x0, f, fp)
    // implementacao do algortimo de Newton-Raphson
    N=100; eps=1.e-5; // max de iteracoes e erro
    xx = x0;
    while (N > 0)
        xn = xx - f(xx)/fp(xx);
        if(abs(xx - xn) < eps) then
            x = xn
            disp(100 - N);
            return(x);
        end;
        N = N-1;
        xx = xn
    end;
    error("algoritmo nao convergiu");
    abort;
endfunction
```

   Explique o que a linha `disp(100 -N);` significa e qual é o critéWrio de parada do algoritmo acima. Faça um gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ entre -1 e 2. Verifique que ela possui três raízes neste intervalo. Usando os valores iniciais $x_0 = -0.5, 0.5, 1.5$, encontre aproximções para as três raízes.

6. Faça um gráfico de $f(x) = x^2 - 4\sin(x)$ entre -3 e 5. Encontre as raízes usando Newton-Raphson. Execute DOIS passos de Newton-Raphson fazendo os cálculos manualmente. Use $x_0 = 3$. Verifique que $x_1 = 2.1530$ e que $x_2 = 1.9540$.

7. Vamos denotar o erro entre a proximação x_k na k-ésima iteração de um algoritmo para encontrar a raiz x^* de uma equação por $e_k = x_k - x^*$. Dizemos que o método converge a uma taxa r se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = c$$

   onde c é alguma constante positiva finita. Se $r = 1$ e $c < 1$, a convergência é dita linear. Se $r > 1$ a convergência é chamada de superlinear e, em particular, se $r = 2$, a convergência é chamada de quadrática,

   - Por que precisamos impor a condição $c < 1$ no caso linear?
   - Se os erros em iterações sucessivas são 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, $10^{-16}, ldots$, qual a taxa de convergência?
   - Se os erros em iterações sucessivas são 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, $10^{-8}, ldots$, qual a taxa de convergência?

8. Que condição sobre a função não-linear e contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ garante que o método da bisseção vai encontrar uma raiz?

9. Se o método da bisseção começa com um intervalo $[a, a + 1]$, qual será o comprimento do intervalo contendo a raiz após 6 iterações? Você precisa conhecer a função f para responder a esta questão? Se o intervalo inicial é $[a, b]$, ache a expressão relacionando o número de iterações necessárias para obter uma aproximação x_{n+1} tal que $x_{n+1} - x_n < \epsilon$. Assuma que $x_0 = (a + b)/2$.

10. A distância vertical y que um paraquedista cai antes de abrir seu paraquedas é dada pela equação

$$y = \frac{1}{k}\ \log\left(\cosh(t\sqrt{gk})\right)$$

onde t é o tempo transcorrido em segundos, $g = 9.8065\ m/s^2$ é a aceleração devido à força da gravidade, e $k = 0.00341\ m^{-1}$ é uma constante relacionada à resistência do ar. A função cosh é a função cosseno hiperbólico. Use o método de Newton e da bisseção para encontrar o tempo necessário para ter uma queda de 1 km.

11. Se uma quantidade Q é emprestada à taxa de juros anual r por n anos, então a quantidade que deve ser paga de volta ao fim dos n anos é igual a $A = Q(1+r)^n$. Pagamentos anuais de q a partir do final do primeiro ano reduzem a dívida. O valor dos pagamentos no final dos n anos é igual a

$$B = q(1+r)^{n-1} + \ldots + q(1+r) + q = q\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

O empréstimo será quitado se as duas quantidades A e B forem iguais.

- Para um empréstimo de R$100000 e pagamentos anuais de R$10000, quanto tempo vai demorar para que a dívida seja quitada se a taxa de juros é de 6% (isto é, $r = 0.06$)?
- Para um empréstimo de $Q = 100000$ e pagamentos anuais de $q = 10000$, qual a taxa de juros necessária para que o empréstimo seja pago em $n = 20$ anos?
- Para um empréstimo de $Q = 100000$, qual deve ser o valor q dos pagamentos anuais para que o empréstimo seja pago em $n = 20$ anos com uma uma taxa de juros de 6%?

Você pode usar qualuer método para resolver este problema. Trate n como uma variável contínua (isto é, podendo assumir valores não-inteiros).

12. As freqüências de vibração de uma viga de densidade uniforme e de comprimento unitário, presa em uma das extremidades e livre na outra, satisfaz a equação

$$\tan(x)\tanh(x) = -1$$

onde tanh é a tangente hiperbólica. Use um método numérico para determinar a menor raiz positiva desta equação. Faça o gráfico da função entre 0 e 5 antes.

13. Na teoria do transporte de nêutrons, o comprimento crítico de uma barra de combustível nuclear (fuel rod) é determinado pelas raízes da equação

$$\cot(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}\ .$$

Encontre a menor raiz positiva desta equação.

14. Queremos calcular $\int_0^\infty\ e^{-x}\ \sqrt{1 - \sin(x)}\ dx$. Obtenha uma aproximação para esta integral usando dois métodos distintos.

- Faça um gráfico da função que está sendo integrada.
- Obtenha uma constante positiva A tal que o erro de truncamento $\int_A^\infty\ e^{-x}\ \sqrt{1 - \sin(x)}\ dx$ seja menor que 10^{-4}. Com este valor de A obtenha uma aproximação para a integral usando a regra de Simpson com $n = (10, 20, \ldots, 90, 100)$ intervalos. Faça um gráfico para ver como o valor aproximado da integral está convergindo a medida que você aumenta n.

15. Uma função f tem os valores mostrados abaixo. Obtenha uma aproximação para a sua integral usando a regra do trapézio. Veja que a aproximação será da forma

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

onde $h_i = x_{i+1} - x_i$. O código scilab pode ser escrito em uma única linha:

```
T = sum(diff(x).*(y(1:end-1)+y(2:end))/2)
```

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	10	8	7	6	5

16. A integral

$$\int_{-1}^{1} e^x \ \sin(\pi x)\ dx = \frac{\pi(e^2-1)}{e(\pi^2+1)} \approx 0.679326$$

Calcule uma aproximação para esta integral usando $n = 10, 20, 30, 40$ e a regra do trapézio e de Simpson. Calcule também a extrapolação de Richardson em cada caso (não precisa fazer o caso $n = 80$).