Secção 3. Aplicações das equações diferenciais de primeira ordem

(Farlow: Sec. 2.3 a 2.6)

Chegou a altura de ilustrar a utilidade prática das equações diferenciais de primeira ordem. Vamos ver que alguns problemas físicos podem ser descritos por EDOs deste tipo.

Decaímento radioactivo

A proporção carbono-14/carbono-12 presente na matéria orgânica viva é constante. No entanto, na matéria orgânica morta a quantidade de ^{14}C diminui com o tempo, *a uma taxa proporcional à quantidade existente*. Se designarmos essa quantidade por Q, teremos então que a variação de Q por unidade de tempo é proporcional a Q:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kQ\,,$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. O sinal negativo é necessário por forma a garantir que Q *decresce* como tempo. Será mais correcto falar em termos de variação *instantânea*:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ\,.$$

Esta EDO resolve-se facilmente por separação de variáveis:

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt \Rightarrow \ln Q = -kt + C \Rightarrow Q = Ce^{-kt}\,.$$

Sabendo que no início $Q(t=0) = Q_0$, então:

$$Q = Q_0 e^{-kt}\,.$$

Esta resultado constitui a base do processo de datação por carbono-14.

2ª Lei de Newton

O enunciado da 2ª Lei de Newton diz-nos que o produto da massa pela aceleração de um corpo é igual ao somatório das forças a que está sujeito:

$$ma = \sum_i F_i\,.$$

Para um corpo em queda livre teremos assim:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv\,,$$

em que v é a velocidade do corpo, k o coeficiente de atrito e g a aceleração da gravidade. Rearranjando a equação, obtemos:

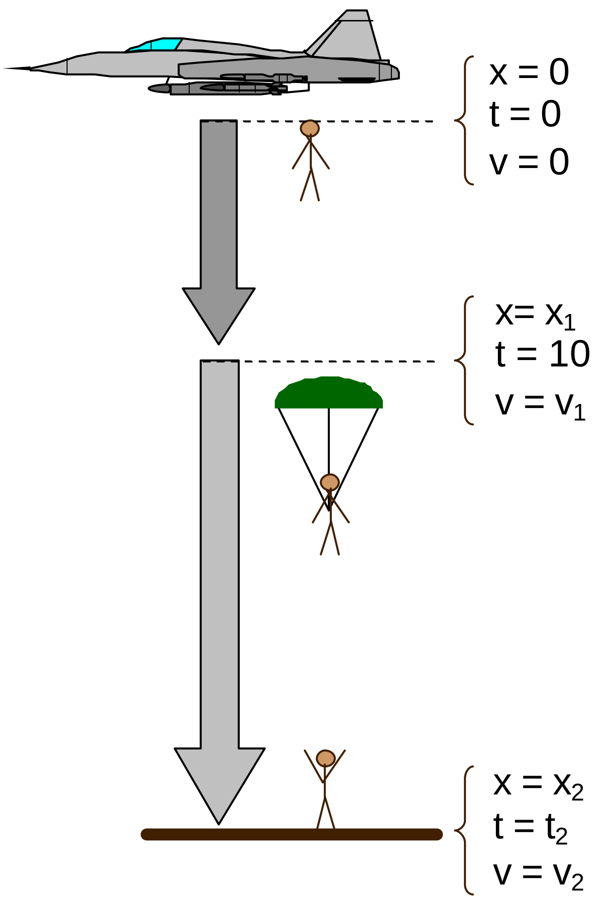
$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g\,,$$

ou seja, uma EDO linear de 1ª ordem que pode ser resolvida por separação de variáveis†. A solução geral é:

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}}$$

Exemplo

Um pára-quedista, pesando 70 Kg, salta de um avião e abre o pára-quedas passados 10 s. Antes da abertura do pára-quedas, o seu coeficiente de atrito é k_{spq} = 5 Kg s^{-1}, depois é k_{cpq} = 100 Kg s^{-1}.



a) Qual a velocidade do pára-quedista no instante em que se abre o pára-quedas?

Já vimos anteriormente qual é a equação que descreve a queda livre, bem como a sua solução:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k_{spq}}{m}v = g \Rightarrow v = \frac{mg}{k_{spq}} + Ce^{-\frac{k_{spq}t}{m}}\,.$$

A constante de integração é determinada a partir da condição inicial:

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{k_{spq}}\,.$$

A solução particular vem então:

---

† Esta EDO também pode ser resolvida pelo método do factor integrante (porquê)? Demonstre que desta forma se obtém o mesmo resultado.

$$v = \frac{mg}{k_{spq}}\left(1 - e^{-\frac{k_{spq}t}{m}}\right) \qquad (t < 10s).$$

Ao fim de 10 segundos, a velocidade alcançada pelo pára-quedista é:

$$v = \frac{mg}{k_{spq}}\left(1 - e^{-\frac{k_{spq}10}{m}}\right) = 70ms^{-1}.$$

b) Qual a distância percorrida em queda livre?

Já obtivemos na alínea anterior a forma como a velocidade do pára-quedista varia com o tempo, durante a queda livre. Sabemos também que a velocidade é a derivada da distância percorrida em ordem ao tempo. Então:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int v\,dt + C = \int \frac{mg}{k_{spq}}\left(1 - e^{-\frac{k_{spq}t}{m}}\right)dt + C.$$

Ou seja:

$$x = \frac{mg}{k_{spq}}\left(t + \frac{m}{k_{spq}}e^{-\frac{k_{spq}t}{m}}\right) + C.$$

Aplicando a condição inicial:

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{m^2 g}{k_{spq}^{\ 2}}.$$

E a solução particular vem:

$$x = \frac{mg}{k_{spq}}\left[t + \frac{m}{k_{spq}}\left(e^{-\frac{k_{spq}t}{m}} - 1\right)\right].$$

Passados os tais 10 segundos, a distância percorrida foi:

$$t = 10s \Rightarrow x = \frac{70 \times 9.8}{5}\left[10 + \frac{7}{5}\left(e^{-\frac{5\times 10}{70}} - 1\right)\right] = 392m.$$

Esperemos que o nosso homem se tenha atirado do avião quando este se encontrava a uma altura superior a 392 m, de contrário ter-se-á estatelado no chão antes de abrir o pára-quedas…

c) Qual a velocidade mínima que o pára-quedista poderá atingir, após a abertura do pára-quedas?

Após a abertura do pára-quedas a velocidade começa a decrescer, devido ao maior coeficiente de atrito, até que é eventualmente atingido um equilíbrio entre a força da gravidade e a força de atrito. A partir desse momento a velocidade permanece constante (é a chamada velocidade limite). A evolução da velocidade após a abertura do pára-quedas é mais uma vez dada pela lei de Newton:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k_{cpq}}{m}v=g\ ,$$

e a sua solução é:

$$v=\frac{mg}{k_{cpq}}+Ce^{-\frac{k_{cpq}t}{m}}\ .$$

Para um tempo suficientemente longo (*t ? 8*) atinge-se a velocidade limite:

$$v_{\min}=\lim_{t\to\infty}v(t)=\frac{mg}{k_{cpq}}=\frac{70\times 9.8}{100}=6.86ms^{-1}\ .$$

É interessante notar que poderíamos chegar a este resultado *sem ter que resolver a equação diferencial*. Realmente, após ser atingida a velocidade limite, esta permanece constante ao longo do tempo, ou seja, $\frac{dv}{dt}=0$ a partir desse instante. Da equação diferencial acima:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k_{cpq}}{m}\frac{mg}{k_{cpq}}=g\Leftrightarrow\frac{dv}{dt}=g-\frac{k_{cpq}}{m}v\ ,$$

logo:

$$\frac{dv}{dt}=0\Rightarrow g-\frac{k_{cpq}}{m}v=0\Leftrightarrow v=\frac{mg}{k_{cpq}}\ ,$$

que é o mesmo resultado que anteriormente.

solução de estado estacionário

Esta solução, que corresponde ao valor *constante* que a variável dependente atinge para um tempo teoricamente infinito, é chamada *solução de estado estacionário*.

Equações de balanço

Um tipo de problema muito comum em Engenharia Química consiste em efectuar um balanço mássico, volúmico ou energético a um determinado sistema aberto (um reactor químico, por exemplo). Vamos aqui ver um exemplo simples de como enunciar este problema em termos de equações diferenciais.

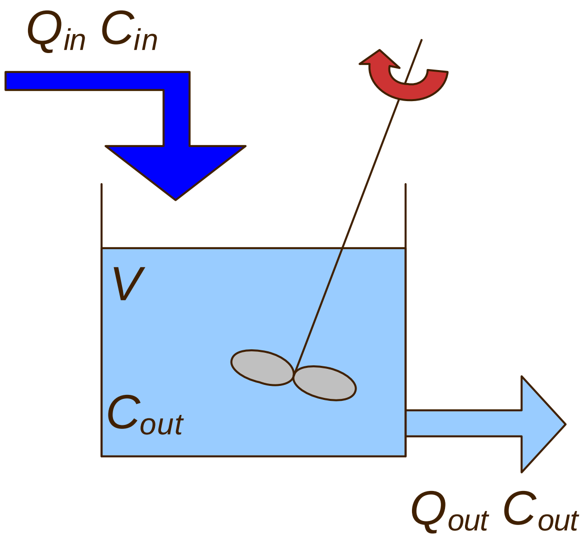
Antes de mais, convém esclarecer em que é que consiste um "balanço". Em termos simples, uma equação de balanço a uma determinada grandeza (volume de líquido num tanque, massa de um reagente num reactor, sacos de batatas numa mercearia...) é escrita na forma:

Equação de balanço

Acumulação = Entradas – Saídas.

As "*entradas*" e "*saídas*" designam a taxa de entrada ou saída da grandeza em causa no sistema. Por exemplo: o Sr. Manuel constatou que entram 5 sacos de batatas por dia na sua mercearia (vindos do fornecedor) e saem 3 sacos de batatas por dia (vendidos aos clientes). A "*acumulação*" designa a taxa de variação com o tempo da grandeza em causa. Por exemplo: O Sr. Manuel concluiu que se acumulam 2 sacos de batatas por dia na mercearia. Se a acumulação for negativa, tal indica uma diminuição da quantidade balanceada com o tempo, passando-se o oposto se a acumulação for positiva.

Exemplo



Vamos considerar um problema de mistura num *tanque bem agitado*‡ como o representado na figura acima. Pretendemos saber como é que a concentração do soluto A no tanque varia ao longo do tempo.

Estão definidas as seguintes variáveis de processo:

- Caudal total de *entrada* (constante) = Q_{in} (m^3/hr)
- Concentração de *entrada* do componente A (constante) = C_{in} (g/m^3)

‡ Dizemos que um tanque é "bem agitado" quando a concentração de soluto(s) no seu interior é uniforme em todos os pontos do meio líquido.

- Caudal total de *saída* (constante) = Q_{out} (m^3/hr)
- Concentração de *saída* do componente A = C_{out} (g/m^3)
- Concentração *no tanque* do componente A = C_{out} (g/m^3)[§]
- Volume de líquido no tanque = V (m^3)

É conhecida a seguinte condição inicial: $t = 0 \Rightarrow C_{out} = C_{out}^0, V = V_0$.

Façamos agora o *balanço mássico* ao componente A:

Acumulação de A = Entradas de A – Saídas de A.

Ou seja:

Variação da massa de A no tanque por unidade de tempo =

= Massa de A que entra por unidade de tempo –

– Massa de A que sai por unidade de tempo.

Como podemos reescrever esta equação em termos mais "matemáticos"? A massa de A *no tanque* é dada por VC_{out}, logo, a sua variação com o tempo será dada por $\frac{\Delta(VC_{out})}{\Delta t}$ ou, em termos de variação instantânea: $\frac{d(VC_{out})}{dt}$. Por outro lado, a massa de A *que entra* por unidade de tempo é dada por $C_{in}Q_{in}$, enquanto que a massa de A *que sai* por unidade de tempo é dada por $C_{out}Q_{out}$. Logo, a equação de balanço fica:

$$\frac{d(VC_{out})}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}.$$

Esta é uma EDO de primeira ordem, em que a variável dependente é a concentração de A no tanque, C_{out}. Após escrever uma equação de balanço é sempre boa ideia *verificar a consistência das unidades*. Ou seja, verificar se todas as parcelas da equação têm as mesmas unidades. Se tal não se verificar, algo está errado no nosso balanço! Vamos ver então se a equação anterior é consistente:

$\frac{d(VC_{out})}{dt}$ tem unidades de: $\frac{volume \times concentração}{tempo} = \frac{m^3 \times \frac{g}{m^3}}{hr} = \frac{g}{hr}$,

$C_{in}Q_{in}$ e $C_{out}Q_{out}$ têm unidades de: $concentração \times caudal = \frac{g}{m^3} \times \frac{m^3}{hr} = \frac{g}{hr}$.

[§] Porque razão dizemos que a concentração de A no tanque é igual à concentração na corrente de saída, C_{out}?

Todas as parcelas têm realmente unidades de g/hr, indicando que o balanço é consistente.

Prossigamos então: temos que resolver a EDO que define o balanço ao soluto A. Antes disso, porém, devemos ter em atenção que o volume de líquido no tanque, V, se encontra dentro da derivada. Para podermos resolver a equação diferencial necessitamos de saber como é que V varia com o tempo! Para tal, temos que efectuar um *balanço volúmico* ao tanque:

Variação de volume de líquido A no tanque por unidade de tempo =

= Volume de líquido que entra por unidade de tempo –

– Volume de líquido que sai por unidade de tempo.

Ou seja:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

É fácil de ver que o balanço é consistente: todas as parcelas têm unidades de m^3/hr.

Temos agora duas situações possíveis. Primeiro, se os caudais de entrada e saída forem iguais ($Q_{out} = Q_{in}$):

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} = 0 \Rightarrow V = \text{constante} \ ,$$

e a equação de balanço a A fica simplesmente:

$$V\frac{dC_{out}}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out} \ .$$

ou, substituindo já Q_{out} por Q_{in}:

$$\frac{dC_{out}}{dt} + \frac{Q_{in}}{V}C_{out} = \frac{Q_{in}}{V}C_{in} \ .$$

Esta EDO pode ser facilmente resolvida por separação de variáveis, dando então:

$$C_{out} = C_{in} - Ce^{-\frac{Q_{in}}{V}t} \ ,$$

e após aplicação da condição inicial:

$$C_{out} = C_{in} - \left(C_{in} - C_{out}^{0}\right)e^{-\frac{Q_{in}}{V}t}\ .^{**}$$

Se os caudais de entrada e saída forem diferentes ($Q_{in} \neq Q_{out}$), mas constantes ao longo do tempo, então é óbvio que o volume de líquido não será constante. Temos então que resolver a equação de balanço volúmico:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \Rightarrow V(t) = \left(Q_{in} - Q_{out}\right)t + V_0$$

em que V_0 é o volume no instante $t = 0$. Agora a equação de balanço a A fica:

$$\frac{d\left(VC_{out}\right)}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out} \Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}\frac{dV}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

$$\Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}(Q_{in} - Q_{out}) = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

$$\Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}Q_{in} = C_{in}Q_{in}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC_{out}}{dt} = \frac{Q_{in}}{V}\left(C_{in} - C_{out}\right)$$

Não nos podemos esquecer que V é função de t! Substituindo o resultado anteriormente obtido ficamos com:

$$\frac{dC_{out}}{dt} = \frac{Q_{in}}{\left(Q_{in} - Q_{out}\right)t + V_0}\left(C_{in} - C_{out}\right).$$

Esta EDO é de variáveis separáveis:

$$\frac{dC_{out}}{C_{in} - C_{out}} = \frac{Q_{in}}{\left(Q_{in} - Q_{out}\right)t + V_0}dt\ .$$

O resultado, já após aplicação da condição inicial, é:

$$C_{out} = C_{in} - \left(C_{in} - C_{out}^{0}\right)\left(\frac{\left(Q_{in} - Q_{out}\right)t + V_0}{V_0}\right)^{-\frac{Q_{in}}{Q_{in} - Q_{out}}}.$$

** Esboce graficamente o aspecto da curva de variação de C_{out} com o tempo.

Sumário da Secção 3

- Exemplos de problemas físicos podem ser descritos por EDOs de primeira ordem:
  - Decaímento radioactivo
  - 2ª Lei de Newton
  - Balanços materiais