Análise Amortizada
(Cap. 17 CLRS)

Prof. Luiz Chaimowicz

Análise Amortizada

- Útil quando se tem uma sequência de operações sobre alguma estrutura de dados, sendo algumas "caras" e outras "baratas"
- Em uma análise de complexidade simples, a operação cara pode elevar erroneamente o custo do pior caso
- Com a análise amortizada é possível mostrar que o **custo amortizado da operação é menor, quando consideradas todas as operações**

Análise Amortizada

- A análise amortizada não é a análise do caso medio que, como vimos, envolve a análise de probabilidades sobre diferentes entradas

- A análise amortizada é a análise do pior caso, mas considerando que em uma sequência de operações os custos diferentes se compensam

Análise Amortizada

- 3 Métodos principais:
  - Análise Agregada
  - Método Contábil (*accounting*)
  - Método do Potencial

Análise Agregada

- Na análise agregada mostra-se que uma sequência de *n* operações tem o custo *T(n)*

- No pior caso, o custo médio (ou amortizado) de cada operação é *T(n)/n*

- Nessa análise o custo amortizado de todas as operações é igual, mesmo sendo o custo real diferente

Exemplo: operações sobre uma Pilha

- Operações comuns, custo O(1):
  - Push(S,x): empilha o item x na pilha S
  - Pop(S): desempliha o top da pilha S
- Nova Operação
  - **Multipop(S,k)**: desempilha k itens da pilha
  - Custo: min(n,k), para *n* itens na pilha O(n)

```
Multipop(S,k)
    while not Vazia(S) and K>0
        pop(S)
        k=k-1
```

Exemplo: operações sobre uma Pilha

- Considerando todas as operações possíveis, no pior caso, qual o custo de *n* operações sobre a Pilha?
- Multipop é *O(n)*: $n.O(n) = O(n^2)$. Correto?
- Correto, mas esse pior caso não é firme!
- Usando a análise agregada, pode-se obter um limite mais firme, considerando que as outras operações "compensam" essa.

Exemplo: operações sobre uma Pilha

- Apesar de uma operação multipop ser O(n), uma sequência qualquer de operações push, pop e multipop em uma pilha vazia é O(n)
  - Só podemos desempilhar um item que foi empilhado. Portanto para *n* operações, temos no máximo *n* itens: O(n).
- Fazendo-se a análise agregada, o custo "médio" de cada operação é **O(n)/n = O(1)**

Exemplo: Contador Binário

A

5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1

$k-1$ 3 2 1 0

```
INCREMENT (A, k)
i ← 0
enquanto i < k e A[i] = 1
    faça A[i] ← 0
         i ← i + 1
se i < k
    então A[i] ← 1
```

Custo:
número de bits invertidos = O(k)

Exemplo: Contador Binário

- n chamadas do procedimento increment
  - n.O(k) = O(n.k).
- Mas quando se analisa a sequência de operações, observa-se que o custo total é menor:
  - A[0] é invertido n vezes
  - A[1] é invertido n/2 vezes
  - A[2] é invertido n/4 vezes ...

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2n = O(n)$$

Custo amortizado por operação é O(n) / n = O(1)

Método Contábil

- No método contábil atribui-se um custo fictício (amortizado) a cada operação, que pode ser maior ou menor que o custo real
  - $\hat{c}_i$: custo amortizado da operação i
  - c_i: real da operação i
- Em uma sequência de n operações a seguinte condição deve ser satisfeita: $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$
- A estrutura de dados armazena o "saldo" das operações, que ajuda a "pagar" operações mais caras

Exemplo: pilha

	Custo Real	Custo Amortizado
Push	1	2
Pop	1	0
Multipop	*min(n,k)*	0

- Cada operação push deixa um "crédito" de 1 que será usado pela operação pop ou multipop.
- Começando com uma pilha vazia, a condição $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$ é satisfeita

Exemplo: Pilha

- Para qualquer sequência de *n* operações Push, Pop e Multipop o **custo amortizado total é menor que *2n = O(n)***
- Como o **custo amortizado é um limite superior do custo real**, considerando-se *n* operações, temos que **o custo real das operações também é *O(n)***

Método Potencial

- Define-se uma função que representa a "Energia Potencial" acumulada na estrutura
- Seja c_i uma operação e Di o estado da estrutura após a aplicação de c_i em D_{i-1}
- A função Φ representa o potencial
- Definimos o custo amortizado de uma operação como o custo real acrescido da mudança de potencial

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) .$$

Método Potencial

- Para uma sequência de n operações:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i &= \sum_{i=1}^{n} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0) .\end{aligned}$$

- Definindo um potencial Φ tal que $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$, temos que o custo amortizado vai ser um limite superior para o custo real

Exemplo: Pilha

- Vamos definir uma função potencial tal que Φ seja o número de itens na pilha. Logo
  - $\Phi(D_0) = 0$
  - $\Phi(D_i) \geq 0$, para todo *i* pois o número de elementos da pilha nunca é negativo
- Portanto o custo amortizado é um limite superior para o custo real

Exemplo: Pilha

Analisando o custo amortizado de cada operação:

- Push: a diferença de potencial causada pela operação em uma pilha com *s* elementos é
  $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s + 1) - s = 1$
  O custo da operação é portanto:
  $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$
- Pop: fazendo um raciocínio similar
  $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s - 1) - s = -1$
  $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 - 1 = 0$

Exemplo: Pilha

- Multipop: a operação multipop em uma pilha com s items remove $k' = \min(s,k)$ items da pilha. Logo a diferença de potencial é
  $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = -k'$
  O custo da operação é portanto:
  $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k' - k' = 0$
- Logo, **o custo amortizado das 3 operações é O(1)**

Exemplo Pilha

- Em uma sequência de n operações quaisquer sobre a pilha, temos que o custo total amortizado é *n.O(1) = O(n)*
- Como o custo amortizado é um limite superior para o custo real, temos que o custo real também é O(n).