UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

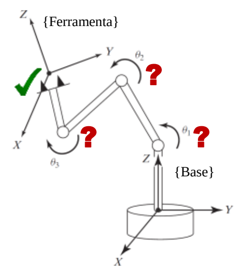
Introdução à Robótica
Cinemática inversa

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

VERLab Visão e Robótica — DCC Departamento de Ciência da Computação

---

Introdução
Cinemática inversa



Introdução
Cinemática inversa

- Como calcular os valores das variáveis de junta que produzirão a posição e orientação desejadas do órgão terminal?
- Dado o valor numérico de ${}^{0}_{N}T$ encontrar os valores de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ (ou $d_1, d_2, \dots, d_N$)
- Sistema de equações não-lineares

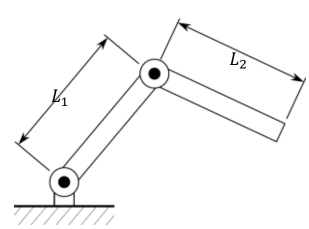
Cinemática inversa
Dificuldades

- Sistema de equações não-lineares
  - As soluções podem não existir
  - Múltiplas soluções são possíveis
  - Método de solução a ser utilizado

Cinemática inversa
Existência de soluções

- Espaço de trabalho
  - Volume definido pelos pontos alcançáveis
  - Alcançável (*reachable*)
    - Pontos alcançáveis com pelo menos uma orientação
  - Hábil (*dexterous*)
    - Pontos alcançáveis em todas orientações possíveis

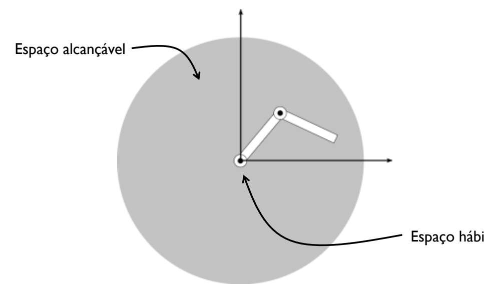
Cinemática inversa
Existência de soluções



Cinemática inversa
Existência de soluções

- Considerando $L_1 = L_2$
  - Espaço alcançável
    - Círculo de raio $R = (L_1 + L_2) = 2L_1$
  - Espaço hábil
    - Um único ponto (a origem)

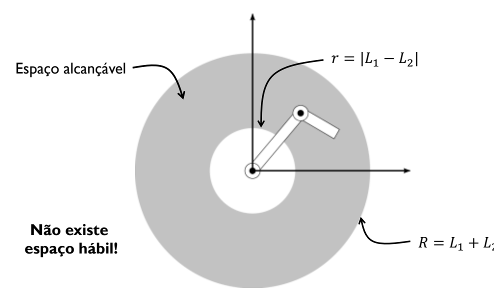
Cinemática inversa
Existência de soluções ($L_1 = L_2$)



Cinemática inversa
Existência de soluções

- Considerando $L_1 \neq L_2$
  - Espaço alcançável
    - Coroa circular com $r = |L_1 - L_2|$ e $R = L_1 + L_2$
    - Dentro desse espaço apenas duas orientações são possíveis. No limite, há apenas uma
  - Espaço hábil
    - Não existe!

Cinemática inversa
Existência de soluções ($L_1 \neq L_2$)



Cinemática inversa
Existência de soluções

- Na prática, o espaço de trabalho alcançável é menor, pois as juntas possuem limites
- Considerando limites
  - Se θ_1 pudesse assumir todos os valores em $[0°, 360°]$, mas $0° \leq \theta_2 \leq 180°$, o espaço alcançável é o mesmo, porém apenas uma orientação será possível em cada ponto

Cinemática inversa
Existência de soluções

- O espaço de trabalho do robô é limitado
- Um manipulador com menos de 6 DoF não consegue alcançar posições e orientações arbitrárias no espaço 3D
- Transformação do referencial da ferramenta
  - Independente da cinemática do manipulador
  - Qual é o referencial atingível mais próximo?

Cinemática inversa
Existência de soluções

- O usuário pensa em termos de $\{T\}$, mas computacionalmente consideramos $\{W\}$
- Dado um referencial alvo $\{G\}$, calcula-se $\{W\}$. Verifica-se se a posição e orientação de $\{W\}$ encontram-se no espaço de trabalho. Caso verdadeiro, existe pelo menos uma solução

Cinemática inversa
Subespaço de manipulador para $n < 6$

- O espaço alcançável por um manipulador de n DoF ($n < 6$), é parte de um subespaço com n graus de liberdade
  - Ex: o subespaço de um manipulador planar com 2 elos é um plano, mas o espaço de trabalho é um subconjunto desse plano $(L_1 + L_2)$, para o caso em que $L_1 = L_2$

Cinemática inversa
Subespaço de manipulador para $n < 6$

- Uma maneira de se especificar o subespaço de um manipulador de n DoF, é fornecer uma expressão para o referencial do pulso $\{W\}$ ou da ferramenta $\{T\}$, em função das n variáveis que o localizam
- O subespaço é gerado ao assinalar a essas variáveis todos os valores possíveis

Cinemática inversa
Subespaço de manipulador para $n < 6$

- Geralmente, ao se definir um alvo para um manipulador com n DoF, utiliza-se n parâmetros para especificar esse alvo
- Entretanto, ao especificar um alvo com 6 graus de liberdade, em geral, não é possível alcançá-lo com um manipulador com $n < 6$

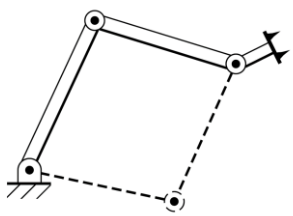
Cinemática inversa
Subespaço de manipulador para $n < 6$

- Especificando alvos quando $n < 6$
  1. Dado um referencial alvo ${}^{S}_{G}T$, calcular um alvo modificado ${}^{S}_{G'}T$ que pertence ao subespaço do manipulador e é o mais próximo do original
  2. Calcular a cinemática inversa baseado em ${}^{S}_{G'}T$. Mas cuidado, essa solução ainda pode não pertencer ao espaço de trabalho do robô

Cinemática inversa
Múltiplas soluções

- Um braço planar com 3 graus de liberdade
  - Apenas juntas de revolução
  - Elos de comprimento *adequado* e juntas com uma boa faixa de trabalho
- Todas as posições no espaço de trabalho são alcançáveis com qualquer orientação
  - Grande espaço de trabalho hábil

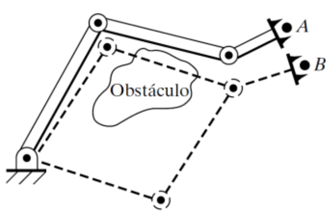
Cinemática inversa
Múltiplas soluções



Cinemática inversa
Múltiplas soluções

- Múltiplas soluções também é um problema
  - Como escolher uma?
- Diferentes critérios podem ser utilizados
  - Escolher a solução mais *próxima*
  - Priorizar o movimento dos elos menores
- A posição do manipulador deve ser utilizada!

Cinemática inversa
Múltiplas soluções



Cinemática inversa
Múltiplas soluções

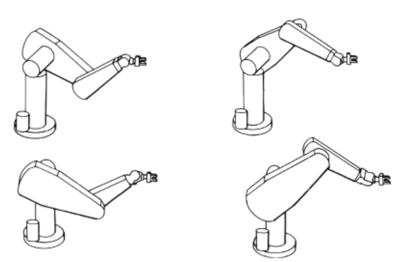
- A quantidade de soluções depende
  - Do número de juntas
  - Dos parâmetros do elo
    - Por exemplo, α_i, a_i e d_i, para juntas de revolução
  - Dos limites de movimento das juntas

Cinemática inversa
Múltiplas soluções

- PUMA 560
  - Possui 8 diferentes soluções para certos alvos
  - Devido a limitações das juntas, algumas devem ser desconsideradas (inacessíveis)
- Variação nas últimas três juntas

$$\theta_4' = \theta_4 + 180°$$
$$\theta_5' = -\theta_5$$
$$\theta_6' = \theta_6 + 180°$$

Cinemática inversa
Múltiplas soluções



Cinemática inversa
Múltiplas soluções

- O número de soluções possíveis está relacionado à quantidade de parâmetros de elo que são diferentes de zero
- Comprimento de elo (a_i)

a_i	Número de soluções
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
Todos $a_i \neq 0$	≤16

Cinemática inversa
Métodos de solução

- Não existem algoritmos gerais que resolvem sistemas de equações não-lineares
- Manipulador solucionável
  - Variáveis de junta são determinadas por um algoritmo que calcula todos os conjuntos de variáveis associadas a uma posição e orientação

Cinemática inversa
Métodos de solução

- Soluções numéricas
  - Métodos de otimização
- Soluções analíticas (fechadas)
  - Algébricas
  - Geométricas

Cinemática inversa
Soluções numéricas vs. Soluções analíticas

- Soluções numéricas
  - Métodos mais genéricos
  - Computacionalmente custosos (iterativos)
  - Resultado aproximado (precisão)
- Soluções analíticas ⬅
  - Aplicável em problemas mais simples
  - Inversão das equações de cinemática direta
  - Resultado exato

Cinemática inversa
Soluções analíticas (fechadas)

- Soluções cujos métodos são baseados em expressões analíticas ou na solução de um polinômio de grau menor ou igual a 4
- Dois métodos básicos
  - Algébricos
  - Geométricos
- Soluções bem parecidas (diferença no foco)

Cinemática inversa
Soluções analíticas (fechadas)

- Todos sistemas com juntas de revolução ou prismáticas, com um total de 6 DoF em uma única cadeia cinemática são solucionáveis
- Essa solução geral, entretanto, é numérica
- Em geral, manipuladores com vários eixos de junta que se interceptam e/ou alguns $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \pm 90°$, possuem solução fechada

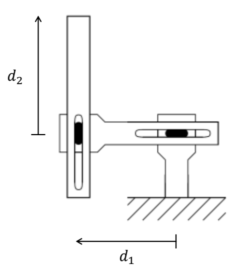
Cinemática inversa
Soluções analíticas (fechadas)

- Para que um manipulador com 6 DoF tenha solução fechada é suficiente que três eixos adjacentes se interceptem em um ponto
- Quase todos manipuladores atendem
  - Manipuladores industriais são projetados dessa forma para terem uma solução fechada

Cinemática inversa
Solução algébrica

- A solução algébrica busca determinar a cinemática inversa a partir das equações de transformação e da descrição da posição e orientação que se deseja alcançar

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo PP)

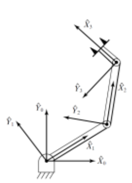


$$x = d_1$$
$$y = d_2$$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo PP)

- A cinemática direta e a inversa são triviais para manipuladores com juntas prismáticas
- Somente uma solução
  - Equações lineares
  - Não envolve funções trigonométricas
- Por este motivo, a geometria é popular
  - CNC, Gantry, Plotters, ...

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$ {}^{B}_{W}T = {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$*c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

- Considerando um manipulador planar
  - Alvo representado por três valores: x, y e ϕ
  - A orientação no plano do Elo 3 é dada por ϕ
- Simplificação específica

$$ {}^{B}_{W}T = \begin{bmatrix} c_{\phi} & -s_{\phi} & 0 & x \\ s_{\phi} & c_{\phi} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

$$ {}^B_WT = {}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^B_WT = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Devem ser resolvidas para θ_1, θ_2 e θ_3:

$$ c_\phi = c_{123} $$
$$ s_\phi = s_{123} $$
$$ x = L_1c_1 + L_2c_{12} $$
$$ y = L_1s_1 + L_2s_{12} $$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

- Elevando ao quadrado e somando, temos:

$$ x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_2 $$

- considerando que

$$ c_{12} = c_1c_2 - s_1s_2 $$
$$ s_{12} = c_1s_2 + s_1c_2 $$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

- Resolvendo para c_2, temos:

$$ c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} $$

- Para que exista uma solução, o lado direito da equação deve possuir valor em $[-1,1]$
  - A existência de solução seria verificada agora
  - O ponto está além do alcance do manipulador

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

- Assumindo o alvo no *workspace*, temos:

$$ s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2} $$

- Logo, θ_2 pode ser obtido por

$$ \theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) $$

Cinemática inversa
Solução algébrica (Exemplo RRR)

- Em seguida, deve-se resolver para θ_1
  - Verificar Livro-Texto (Craig, Cap. 4, Pag. 111)

$$ \theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(k_2, k_1) \qquad \begin{matrix} k_1 = L_1 + L_2c_2 \\ k_2 = L_2s_2 \end{matrix} $$

- Finalmente, θ_3 será obtido a partir de

$$ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi $$

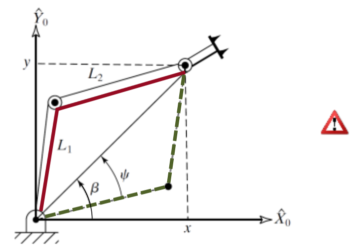
Cinemática inversa
Solução geométrica

- A abordagem geométrica envolve decompor o problema de geometria espacial do manipulador em problemas de geometria plana mais simples
- Para muitos manipuladores (em particular quando $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \pm 90°$), isso pode ser feito com certa facilidade

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- A figura a seguir mostra o triângulo formado por L_1, L_2 e a linha que une a origem do sistema de referência {0} com a origem do sistema de referência {3}
- As linhas pontilhadas representam a outra configuração possível do triângulo que levaria à mesma posição do sistema de referência {3}

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)



Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1\, L_2 \cos(180 + \theta_2)$$

- Como $\cos(180 + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$, tem-se

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- Para o triângulo existir, é necessário que a distância para o alvo ($\sqrt{x^2 + y^2}$) seja menor ou igual a $L_1 + L_2$
- A existência de solução seria verificada agora
  - A condição não é satisfeita se o alvo estiver fora do alcance do manipulador

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- Resolvendo para θ_1, calcula-se β, dado por

$$\beta = \operatorname{atan2}(y, x)$$

- E ψ, pela lei dos cossenos

$$\cos\psi = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- Para que a geometria da equação anterior seja preservada, deve-se ter $0 \leq \psi \leq 180°$
- Consideração comum nesse tipo de solução
- Assim, θ_1 é dado por

$$\theta_1 = \beta \pm \psi$$

- onde o sinal "+" é utilizado quando $\theta_2 < 0$, e o sinal "-" quando $\theta_2 > 0$

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

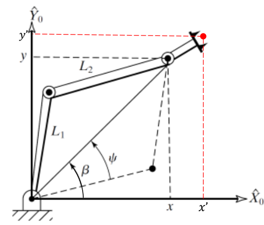
- Finalmente, θ_3 é obtido a partir de

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

- E a posição da garra?
  - Esse é o ponto onde ocorrerá a manipulação

Cinemática inversa
Solução geométrica (Exemplo RRR)

- Basta considerá-la inicialmente



$$x = x` - L_3 \cos\phi$$
$$y = y` - L_3 \sin\phi$$