

## Introdução à Robótica

### Robótica Móvel – Representação / Modelo

Prof. Douglas G. Macharet  
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

## Introdução

### Cinemática

- Como sistemas mecânicos se comportam
  - Considera posição, velocidade, aceleração
  - Não considera as forças e torques
- É importante para
  - Projetar robôs apropriados para as tarefas
  - Implementar algoritmos de controle corretos

## Introdução

### Cinemática

- Cinemática direta
  - Informado o conjunto de entradas de controle, como o robô se movimenta?
- Cinemática inversa
  - Informado o tipo de movimento desejado, quais devem ser as entradas de controle?

## Introdução

### Cinemática

- Similar à cinemática de manipuladores
- Principais diferenças (e problemas)
  - Não é possível medir diretamente a posição
  - É necessário integrar a posição no tempo
  - Gera imprecisão na estimativa da posição
    - Um dos principais problemas em robótica móvel!

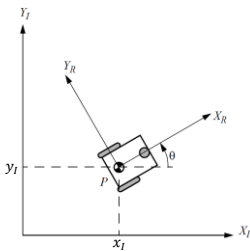
## Representação

- O robô é modelado como um corpo rígido
  - 3 variáveis (plano)
  - 6 variáveis (espaço)
- Deve-se estabelecer uma relação entre o referencial local (robô) e o referencial global
  - Referencial global:  $\{U\}$ ,  $\{I\}$  ou  $\{W\}$

## Representação



## Representação



Posição:

$$\mathbf{x} = [x \ y]^T$$

Configuração (Pose):

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$$

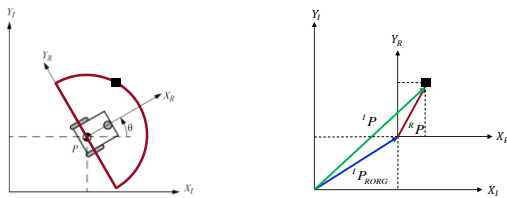
$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$$

## Representação

- Informações sensoriais adquiridas em  $\{R\}$ 
  - Encoders (velocidades), Laser, ...
- Deve-se realizar a transformação para  $\{W\}$ 
  - Translação
  - Rotação

## Representação

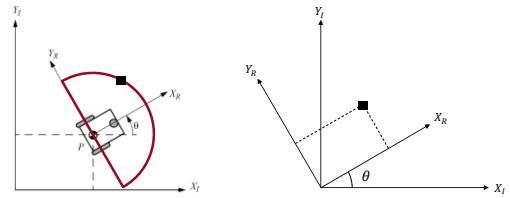
- Translação:  ${}^I P = {}^R P + {}^I P_{RORG}$



## Representação

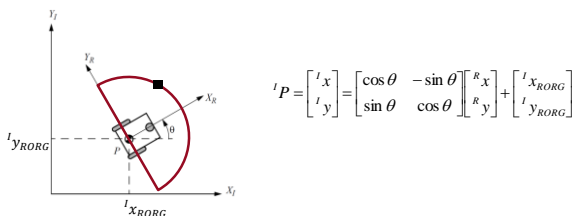
- Rotação:  ${}^I P = {}^I R {}^R P$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



## Representação

- Transformação:  ${}^I P = {}^I R {}^R P + {}^I P_{RORG}$



$${}^I P = \begin{bmatrix} {}^I x \\ {}^I y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R x \\ {}^R y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^I x_{RORG} \\ {}^I y_{RORG} \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

- Calcular a posição do robô em função das velocidades de seus atuadores
  - Centro de massa ou geométrico
  - Centro do eixo das rodas motrizes
- Cinemática direta → Modelo geométrico
- Cinemática inversa → Controle

## Modelo cinemático

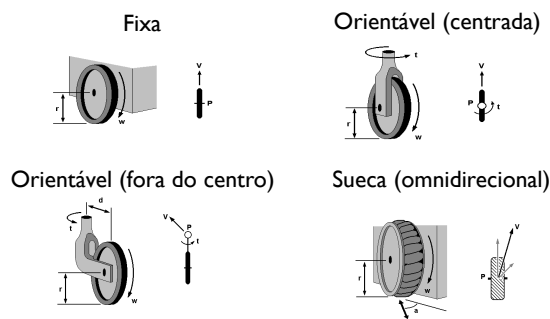
### Considerações

- Não ocorrem deslizamentos (derrapagem)
  - Direção ortogonal de rolamento
  - Translacional entre a roda e a superfície



## Modelo cinemático

### Tipos de rodas



## Modelo cinemático

### Parâmetros das rodas

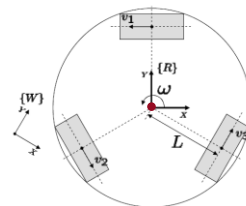
- $r$ : raio da roda
- $\omega$ : velocidade angular da roda
- $v$ : velocidade linear da roda
- $t$ : velocidade de giro de direção (steering)

## Modelo cinemático

### Robô Omnidirecional

$$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60) = \frac{1}{2}$$



## Modelo cinemático

### Robô Omnidirecional

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & r/2 & r/2 \\ 0 & -r\sqrt{3}/2 & r\sqrt{3}/2 \\ r/L & r/L & r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}$$

- onde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são as velocidades angulares das três rodas suecas

## Modelo cinemático

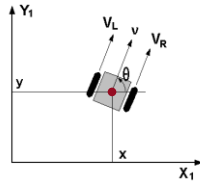
### Robô Diferencial

- Duas rodas motrizes paralelas
  - Mais uma roda ou roller-ball para o equilíbrio
- Mecanismo mais simples de movimentação
- Resultado das velocidades relativas das rodas
  - Pequenos erros geram diferentes caminhos, não apenas diferentes velocidades de movimentação

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Velocidades  $v_L$  e  $v_R$ 
  - Obtidas por  $\omega_L$  e  $\omega_R$
- Entrada de controle
 
$$U = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$
  - Velocidade linear ( $v$ )
  - Velocidade angular ( $\omega$ )



## Modelo cinemático

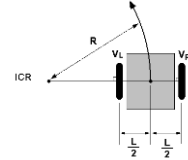
### Robô Diferencial

- As trajetórias das rodas em torno do ICR possuem a mesma velocidade angular ( $\omega$ )

$$v_L = \omega \left( R - \frac{L}{2} \right) \quad v_R = \omega \left( R + \frac{L}{2} \right)$$

$$\omega = \frac{v_L}{R - L/2} = \frac{r\omega_L}{R - L/2}$$

$$\omega = \frac{v_R}{R + L/2} = \frac{r\omega_R}{R + L/2}$$



## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Velocidades rodas  $\rightarrow$  Entrada de controle
- Resolvendo para  $\omega$

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{L} = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{R - L/2}$$

- Como  $v = \omega \cdot R$ , temos

$$R = \frac{L(\omega_L + \omega_R)}{2(\omega_R - \omega_L)} \quad v = \frac{v_R + v_L}{2} = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}$$

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- A partir de  $v$  e  $\omega$ , é possível obter  $\dot{q}$  como

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta(t)/2 & r \cos \theta(t)/2 \\ r \sin \theta(t)/2 & r \sin \theta(t)/2 \\ r/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R(t) \\ \omega_L(t) \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Geralmente, controladores de mais baixo nível calculam  $v$  e  $\omega$  a partir de  $\omega_R$  e  $\omega_L$
- Modelo cinemático simplificado
  - Unicycle Model

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Movimento em linha reta

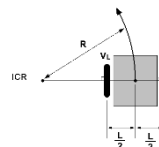
$$v_R = v_L$$

$$R = \infty$$

- Giro sobre o eixo

$$v_R = -v_L$$

$$R = 0$$



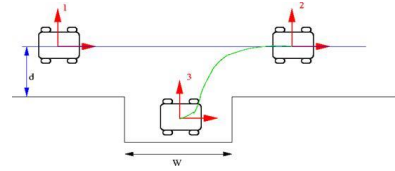
## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica
  - O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
- Qual o significado físico?
  - As próprias rodas já inserem as restrições!

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial



## Graus de Liberdade

- Número de variáveis independentes que representam a posição/orientação do robô
- Exemplos
  - Ponto no plano: 2
  - Robô no plano: 3
  - Corpo rígido no espaço: 6

## Graus de Liberdade

- Atuados x Não Atuados
- Velocidades atuáveis < DoF
  - Não-holonômico
- Velocidades atuáveis = DoF
  - Holonômico
- Velocidades atuáveis > DoF
  - Redundante

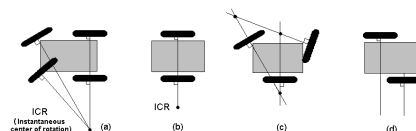
## Manobrabilidade

- Mobilidade cinemática
  - Habilidade de se mover pelo ambiente
- Rodas satisfazem restrição de rolamento
- Capacidade de manipular a posição
  - A partir da variação das velocidades
  - Através do movimento das rodas direcionais

## Manobrabilidade

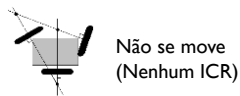
### Arranjo das rodas

- Ponto de cruzamento entre todos os eixos
  - *Instantaneous center of rotation (ICR)*, ou
  - *Instantaneous center of curvature (ICC)*

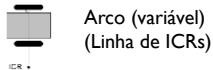


## Grau de Mobilidade (mobility)

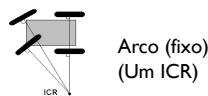
### ▪ Liberdade de movimento



- Grau de mobilidade: 0



- Grau de mobilidade: 2



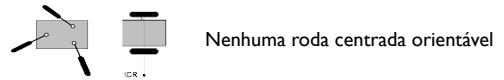
- Grau de mobilidade: 1



- Grau de mobilidade: 3

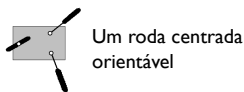
## Grau de Dirigibilidade (steerability)

### ▪ Número de rodas centradas orientáveis que podem ser movidas independentemente

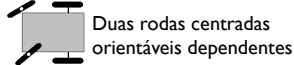


- Grau de dirigibilidade: 0

## Grau de Dirigibilidade (steerability)



- Grau de dirigibilidade: 1

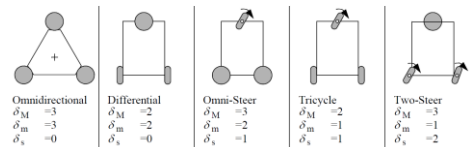


- Grau de dirigibilidade: 2

## Grau de Manobrabilidade

### ▪ Os DoF total que um robô pode manipular

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$



## Grau de Manobrabilidade

### ▪ Tipo do robô ( $\delta_m, \delta_s$ )

