

**UFMG**  
UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE MÍNIAS GERAIS

## Introdução à Robótica

### Robótica Móvel – Representação / Modelo

Prof. Douglas G. Macharet  
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

**DCC**  
DEPARTAMENTO DE  
CIÉNCIA DA COMPUTAÇÃO

**VIRLab**

## Introdução

### Cinemática

- Como sistemas mecânicos se comportam
  - Considera posição, velocidade, aceleração
  - Não considera as forças e torques
- É importante para
  - Projetar robôs apropriados para as tarefas
  - Implementar algoritmos de controle corretos



**DCC**  
DEPARTAMENTO DE  
CIÉNCIA DA COMPUTAÇÃO

## Introdução

### Cinemática

- Cinemática direta
  - Informado o conjunto de entradas de controle, como o robô se movimenta?
- Cinemática inversa
  - Informado o tipo de movimento desejado, quais devem ser as entradas de controle?

**DCC M**

Introdução à Robótica - Representação / Modelos cinemáticos

**DCC**  
DEPARTAMENTO DE  
CIÉNCIA DA COMPUTAÇÃO

## Introdução

### Cinemática

- Similar à cinemática de manipuladores
- Principais diferenças (e problemas)
  - Não é possível medir diretamente a posição
  - É necessário integrar a posição no tempo
  - Gera imprecisão na estimativa da posição
    - Um dos principais problemas em robótica móvel!

**DCC M**

Introdução à Robótica - Representação / Modelos cinemáticos

## Representação

- O robô é modelado como um corpo rígido
  - 3 variáveis (plano)
  - 6 variáveis (espaço)
- Deve-se estabelecer uma relação entre o referencial local (robô) e o referencial global
  - Referencial global:  $\{U\}$ ,  $\{I\}$  ou  $\{W\}$

**DCC M**

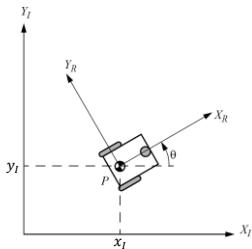
Introdução à Robótica - Representação / Modelos cinemáticos

## Representação

**DCC**  
DEPARTAMENTO DE  
CIÉNCIA DA COMPUTAÇÃO

Introdução à Robótica - Representação / Modelos cinemáticos

## Representação



Posição:

$$\mathbf{x} = [x \ y]^T$$

Configuração (Pose):

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$$

## Representação

- Informações sensoriais adquiridas em  $\{R\}$

- Encoders (velocidades), Laser, ...

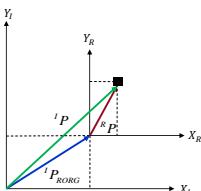
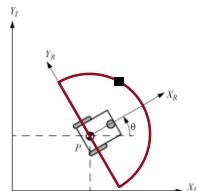
- Deve-se realizar a transformação para  $\{W\}$

- Translação

- Rotação

## Representação

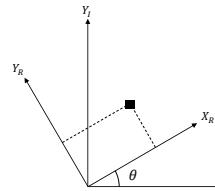
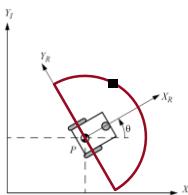
- Translação:  ${}^I P = {}^R P + {}^I P_{ORG}$



## Representação

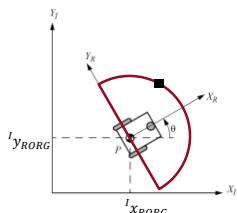
- Rotação:  ${}^I P = {}_R^I R^R P$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



## Representação

- Transformação:  ${}^I P = {}_R^I R^R P + {}^I P_{ORG}$



$${}^I P = \begin{bmatrix} {}^I x \\ {}^I y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^R x \\ {}^R y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^I x_{ORG} \\ {}^I y_{ORG} \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

- Calcular a posição do robô em função das velocidades de seus atuadores

- Centro de massa ou geométrico

- Centro do eixo das rodas motrizes

- Cinemática direta → Modelo geométrico

- Cinemática inversa → Controle

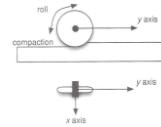
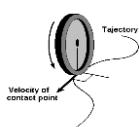
## Modelo cinemático

### Considerações

- Não ocorrem deslizamentos (derrapagem)

▪ Direção ortogonal de rolagem

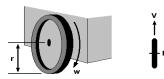
▪ Translacional entre a roda e a superfície



## Modelo cinemático

### Tipos de rodas

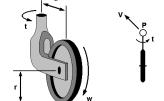
Fixa



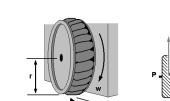
Orientável (centrada)



Orientável (fora do centro)



Sueca (omnidirecional)



## Modelo cinemático

### Parâmetros das rodas

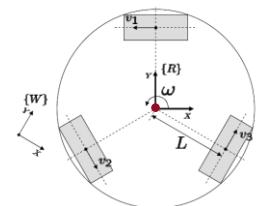
- $r$ : raio da roda
- $\omega$ : velocidade angular da roda
- $v$ : velocidade linear da roda
- $t$ : velocidade de giro de direção (steering)

## Modelo cinemático

### Robô Omnidirecional

$$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60) = \frac{1}{2}$$



## Modelo cinemático

### Robô Omnidirecional

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & r/2 & r/2 \\ 0 & -r\sqrt{3}/2 & r\sqrt{3}/2 \\ r/L & r/L & r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}$$

- onde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são as velocidades angulares das três rodas suecas

## Modelo cinemático

### Robô Diferencial

- Duas rodas motrizes paralelas

▪ Mais uma roda ou *roller-ball* para o equilíbrio

- Mecanismo mais simples de movimentação

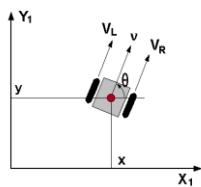
- Resultado das velocidades relativas das rodas

▪ Pequenos erros geram diferentes caminhos, não apenas diferentes velocidades de movimentação

## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Velocidades  $v_L$  e  $v_R$ 
  - Obtidas por  $\omega_L$  e  $\omega_R$
- Entrada de controle  
 $U = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$ 
  - Velocidade linear ( $v$ )
  - Velocidade angular ( $\omega$ )



## Modelo cinemático

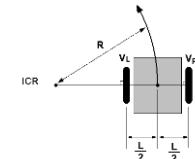
Robô Diferencial

- As trajetórias das rodas em torno do ICR possuem a mesma velocidade angular ( $\omega$ )

$$v_L = \omega \left( R - \frac{L}{2} \right) \quad v_R = \omega \left( R + \frac{L}{2} \right)$$

$$\omega = \frac{v_L}{R - L/2} = \frac{r\omega_L}{R - L/2}$$

$$\omega = \frac{v_R}{R + L/2} = \frac{r\omega_R}{R + L/2}$$



## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Velocidades rodas → Entrada de controle
  - Resolvendo para  $\omega$
- $$\omega = \frac{v_R - v_L}{L} = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{R - L/2}$$

- Como  $v = \omega \cdot R$ , temos

$$R = \frac{L(\omega_L + \omega_R)}{2(\omega_R - \omega_L)} \quad v = \frac{v_R + v_L}{2} = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}$$

## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- A partir de  $v$  e  $\omega$ , é possível obter  $\dot{\theta}$  como
 
$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

- O modelo cinemático é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta(t)/2 & r \cos \theta(t)/2 \\ r \sin \theta(t)/2 & r \sin \theta(t)/2 \\ r/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R(t) \\ \omega_L(t) \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Geralmente, controladores de mais baixo nível calculam  $v$  e  $\omega$  a partir de  $\omega_R$  e  $\omega_L$
- Modelo cinemático simplificado
  - Unicycle Model

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Movimento em linha reta
  - $v_R = v_L$
  - $R = \infty$
- Giro sobre o eixo
  - $v_R = -v_L$
  - $R = 0$

## Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica

- O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
- $$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

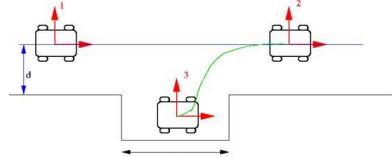
- Qual o significado físico?

- As próprias rodas já inserem as restrições!



## Modelo cinemático

Robô Diferencial



## Graus de Liberdade

- Número de variáveis independentes que representam a posição/orientação do robô

- Exemplos

- Ponto no plano: 2
- Robô no plano: 3
- Corpo rígido no espaço: 6



## Graus de Liberdade

- Atuados x Não Atuados

- Velocidades atuáveis < DoF

- Não-holonômico

- Velocidades atuáveis = DoF

- Holonômico

- Velocidades atuáveis > DoF

- Redundante



## Manobrabilidade

- Mobilidade cinemática

- Habilidade de se mover pelo ambiente

- Rodas satisfazem restrição de rolamento

- Capacidade de manipular a posição

- A partir da variação das velocidades
- Através do movimento das rodas direcionais



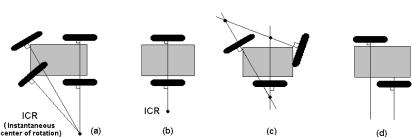
## Manobrabilidade

Arranjo das rodas

- Ponto de cruzamento entre todos os eixos

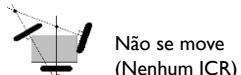
- *Instantaneous center of rotation (ICR)*, ou

- *Instantaneous center of curvature (ICC)*



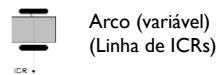
## Grau de Mobilidade (mobility)

- Liberdade de movimento



Não se move  
(Nenhum ICR)

- Grau de mobilidade: 0



Arco (variável)  
(Linha de ICRs)

- Grau de mobilidade: 2



Arco (fixo)  
(Um ICR)

- Grau de mobilidade: 1

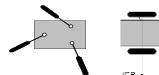


Movimento livre  
(ICR livre)

- Grau de mobilidade: 3

## Grau de Dirigibilidade (steerability)

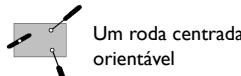
- Número de rodas centradas orientáveis que podem ser movidas independentemente



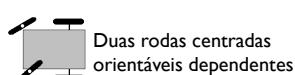
Nenhuma roda centrada orientável

- Grau de dirigibilidade: 0

## Grau de Dirigibilidade (steerability)

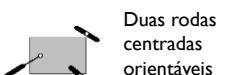


Um roda centrada orientável



Duas rodas centradas orientáveis dependentes

- Grau de dirigibilidade: 1



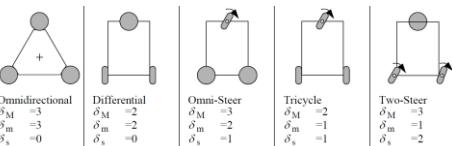
Duas rodas centradas orientáveis independentes

- Grau de dirigibilidade: 2

## Grau de Manobrabilidade

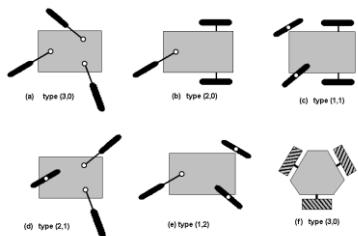
- Os DoF total que um robô pode manipular

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$



## Grau de Manobrabilidade

- Tipo do robô ( $\delta_m, \delta_s$ )



(a) type (3,0)      (b) type (2,0)      (c) type (1,1)  
 (d) type (2,1)      (e) type (1,2)      (f) type (3,0)