UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

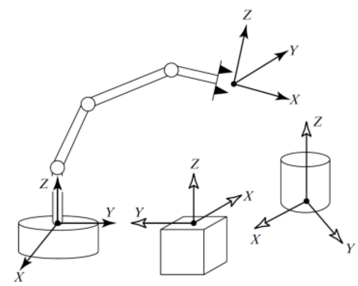
Introdução à Robótica
Descrição espacial e Transformações (1/2)

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

VERLab Visão e Robótica — DCC Departamento de Ciência da Computação

---

Introdução



Introdução

- Posições e Orientações
  - Partes, ferramenta e do próprio manipulador
- É necessário adotar uma convenção geral
- Sistema de coordenadas geral
  - E os sistemas de coordenadas locais?

Introdução
Objetivos

- Descrever corpos rígidos no espaço 3D
- Formulação matemática consistente
- Sistema de coordenadas universal
  - Transformações entre os referenciais

Introdução
Corpo rígido

- Entidade física
  - Forma e dimensões (tamanho) não se alteram
  - Distâncias relativas das partículas não se alteram
- De maneira geral (na prática)
  - Movimentos e deformações intrínsecas são desprezíveis comparado ao movimento total

---

Introdução
Notação

- Vetores e Matrizes
  - Letra Maiúscula
- Escalares
  - Letra Minúscula
- Referenciais
  - Sobrescrito e Subscrito precedentes

Representação

- Descrição de posição
- Descrição de orientação
- Descrição de sistema de referência

Representação
Descrição de posição

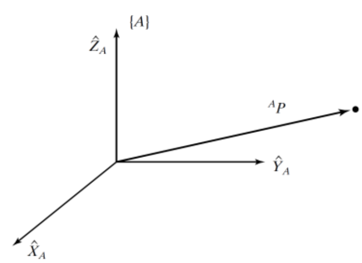
- Um vetor localiza um ponto no espaço 3D
- O vetor deve conter informações sobre qual sistema de coordenadas ele está definido

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Representação
Descrição de posição

- Um sistema de coordenadas é representado por uma letra maiúscula entre chaves, ex. {A}
- Vetores unitários que indicam as principais direções do sistema de coordenadas usam a notação "chapeu" (^)
  - Eixos principais

Representação
Descrição de posição



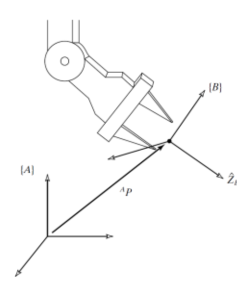
$$\hat{X}_A \times \hat{Y}_A = \hat{Z}_A$$
$$\hat{Y}_A \times \hat{Z}_A = \hat{X}_A$$
$$\hat{Z}_A \times \hat{X}_A = \hat{Y}_A$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{X}_A = \left\|\hat{X}_A\right\| = 1$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Y}_A = 0$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Z}_A = 0$$

Representação
Descrição de orientação

- Descrever um corpo rígido utilizando um ponto pode não ser muito representativo
- É importante representar a orientação
- Descrita a partir de um sistema de coordenadas <u>afixado no próprio corpo</u> em relação a outro sistema de coordenadas

Representação
Descrição de orientação



Representação
Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {B} em relação a {A}

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

- ${}^{A}\hat{X}_{B}$: Coordenada X do sistema {B} descrita no sistema {A}

Representação
Descrição de orientação

- Cossenos direcionais (diretores)

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_{B}\cdot\hat{X}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{X}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{X}_{A} \\ \hat{X}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{Y}_{A} \\ \hat{X}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} & \hat{Y}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} & \hat{Z}_{B}\cdot\hat{Z}_{A} \end{bmatrix} $$

$$ \hat{X}_{B}\cdot\hat{X}_{A} = \left\|\hat{X}_{B}\right\|\left\|\hat{X}_{A}\right\|\cos\theta = \cos\theta $$

$$ \left\|\hat{X}_{B}\right\| = \left\|\hat{X}_{A}\right\| = 1 $$

Representação
Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {A} em relação a {B}

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{A}\cdot\hat{X}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{X}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{X}_{B} \\ \hat{X}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} \\ \hat{X}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} $$

Representação
Descrição de orientação

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} $$

- Isso sugere que o inverso de uma matriz de rotação é igual à sua transposta

Representação
Descrição de orientação

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = I_{3} $$

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

- Matriz ortogonal
  - Colunas (ou linhas) são vetores ortonormais
  - A inversa é igual a sua transposta

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

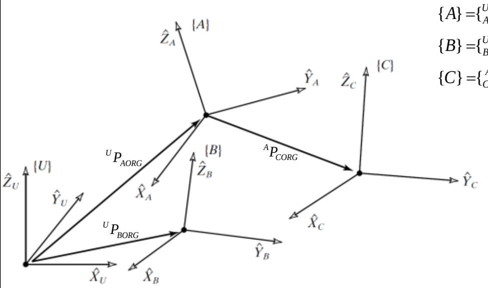
- Sistema de coordenadas que, além da orientação, possui o vetor posição da sua origem em relação a outro *frame*

$$ \{B\} = \{{}^{A}_{B}R, {}^{A}P_{BORG}\} $$

- Posição: *frame* em que a matriz de rotação é a matriz identidade
- Orientação: *frame* com vetor posição nulo

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

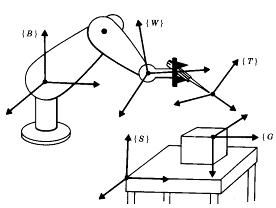
$$\{A\} = \{{}^U_A R, {}^U P_{AORG}\}$$
$$\{B\} = \{{}^U_B R, {}^U P_{BORG}\}$$
$$\{C\} = \{{}^A_C R, {}^A P_{CORG}\}$$



Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

- Existem diversos sistemas de referências
  - Sistema de coordenadas do mundo
  - Sistema de coordenadas do robô
  - Sistema de coordenadas de um sensor
  - Sistema de coordenadas de um objeto

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)



- **B**ase, **W**rist, **T**ool, **S**tation, **G**oal

Representação
Mapeamentos

- Como descrever a posição de um ponto no referencial {A} dada a descrição em {B}?
  - Mapeamento entre referenciais
- Utilizados para determinar descrições de um referencial para outro referencial
  - Translação e Rotação

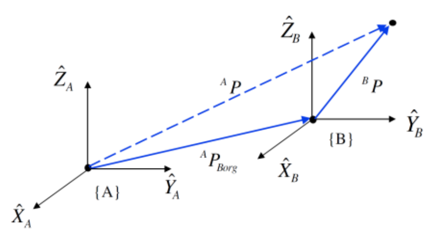
Representação
Mapeamentos – Translação

- Referenciais com a mesma orientação (sem rotação relativa), porém origens diferentes

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

- O vetor ${}^A P_{BORG}$ define um mapeamento

Representação
Mapeamentos – Translação



Representação
Mapeamentos – Translação (Exemplo)

- Dados 2 referenciais {A} e {B} com mesma orientação, porém a origem de {B} está deslocada 7 unidades da origem de {A} ao longo do eixo $\hat{X}_A$ e 2 unidades ao longo do eixo $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^BP$, defina ${}^AP_{BORG}$ e ${}^AP$.

$${}^BP = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$${}^AP_{BORG} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^AP = {}^BP + {}^AP_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação

- Referenciais com a mesma origem, porém com orientações diferentes
- Colunas da matriz de rotação são vetores unitários e mutuamente ortogonais, logo

$${}^A_BR = {}^B_AR^{-1} = {}^B_AR^T$$

$${}^A_BR = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação

- Projeções do vetor sobre os eixos (vetores unitários) do seu referencial

$${}^Ap_x = {}^B\hat{X}_A \cdot {}^BP$$

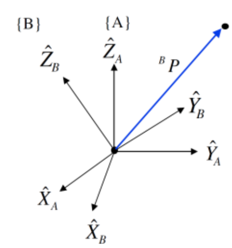
$${}^Ap_y = {}^B\hat{Y}_A \cdot {}^BP$$

$${}^Ap_z = {}^B\hat{Z}_A \cdot {}^BP$$

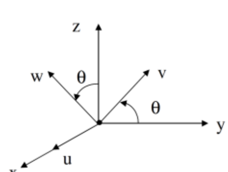
- Substituindo

$${}^AP = {}^A_BR\,{}^BP$$

Representação
Mapeamentos – Rotação



Representação
Mapeamentos – Rotação



$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot i_v & i_x \cdot i_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot i_v & j_y \cdot i_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot i_v & k_z \cdot i_w \end{bmatrix} \qquad R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação (Exemplo)

- Um referencial {B} está rotacionado de $\theta = 30^\circ$ em relação ao eixo $\hat{Z}_A$ do referencial {A}. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P$.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix} $$

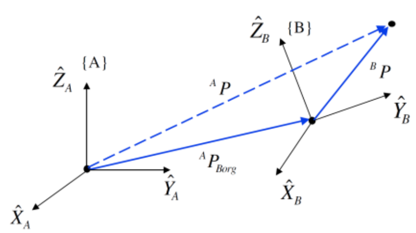
$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} -1{,}000 \\ 1{,}732 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} $$

Representação
Mapeamentos – Translação+Rotação

- Referenciais com origens e orientações diferentes. Considera-se duas etapas:
  - Descrever o ponto ${}^{B}P$ em relação a um referencial intermediário, com mesma orientação que {A}, mas origem igual a {B} — Rotação
  - Somar a diferença entre as origens — Translação

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

Representação
Mapeamentos – Translação+Rotação



Representação
Coordenadas homogêneas

- Composição de translação e rotação se torna complexa ao agrupar várias operações
- Matrizes de transformações homogêneas
  - Forma mais elegante de compor transformações
  - Rotações, Translações e Escala
  - Qualquer dimensão do espaço

Representação
Transformação homogênea

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \Rightarrow {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P $$

Representação
Transformação homogênea

$$ \left[\begin{array}{ccc|c} r_1 & r_2 & r_3 & \Delta x \\ r_4 & r_5 & r_6 & \Delta y \\ r_7 & r_8 & r_9 & \Delta z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Rotação ($r_1 \ldots r_9$) — Translação ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) — Perspectiva ($0\ 0\ 0$) — Escala ($1$)

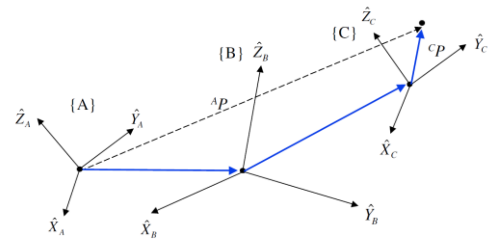
Representação
Transformação homogênea (Exemplo)

- Seja {B} um referencial rotacionado $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^BP$, defina ${}^A_BT$ e ${}^AP$.

$$ {}^BP = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^A_BT = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^AP = {}^A_BT\,{}^BP = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} $$

Representação
Transformações compostas



Representação
Transformações compostas

- O referencial {C} é conhecido em relação a {B}, e o referencial {B} é conhecido em relação a {A}. Como obter ${}^AP$, a partir de ${}^CP$?
  - 1) ${}^BP = {}^B_CT\,{}^CP$
  - 2) ${}^AP = {}^A_BT\,{}^BP$

$$ \Rightarrow \quad {}^AP = {}^A_BT\,{}^B_CT\,{}^CP $$

- Pode-se então, definir:

$$ {}^A_CT = {}^A_BT\,{}^B_CT $$

Representação
Transformações compostas

$$ {}^A_CT = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^A_BR\,{}^B_CR & & {}^A_BR\,{}^BP_{CORG} + {}^AP_{BORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Representação
Invertendo uma transformação

- Dado um referencial {B} conhecido em relação a {A}, ou seja, ${}^A_BT$ é conhecido
- Como fazer se queremos o contrário?
  - Descrição de {A} em relação a {B}
  - Deseja-se obter ${}^B_AT$
- Pode-se calcular a inversa da matriz 4×4
  - Não é o mais eficiente computacionalmente

Representação
Invertendo uma transformação

- Como ser mais eficiente?
  - Estrutura inerente à transformação
- Para se obter ${}^B_AT$, deve-se calcular ${}^B_AR$ e ${}^BP_{AORG}$ a partir de ${}^A_BR$ e ${}^AP_{BORG}$
- Como visto anteriormente

$$ {}^B_AR = {}^A_BR^T $$

Representação
Invertendo uma transformação

- A descrição de ${}^{A}P_{BORG}$ em {B} é dada por

$$ {}^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG} $$

- O lado esquerdo da equação deve ser zero

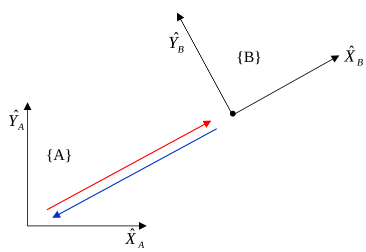
$$ {}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} $$

Representação
Invertendo uma transformação

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} $$

Representação
Invertendo uma transformação (Exemplo)



Representação
Invertendo uma transformação (Exemplo)

- Seja {B} um referencial rotacionado $\theta = 30^{\circ}$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 4 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 3 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado ${}^{A}_{B}T$ defina ${}^{B}_{A}T$.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 4{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 3{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 & 0{,}000 & -4{,}964 \\ -0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & -0{,}598 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Representação
Mapeamento

- O mapeamento <u>não altera</u> a posição do ponto, ele apenas muda a <u>descrição</u> de um ponto de um sistema de coordenadas para outro!