UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

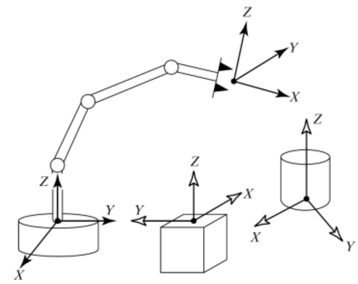
Introdução à Robótica
Descrição espacial e Transformações (2/2)

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

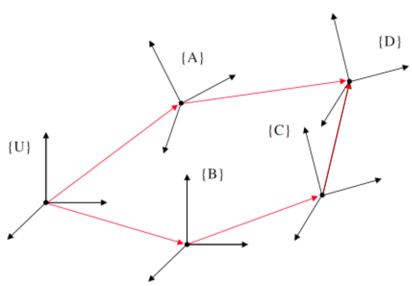
VERLab Visão e Robótica — DCC Departamento de Ciência da Computação

---

Introdução



Representação
Equações de transformação



Representação
Equações de transformação

- O referencial {D} pode ser obtido como

$${}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T \quad \text{ou} \quad {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$$

- Equação de transformação

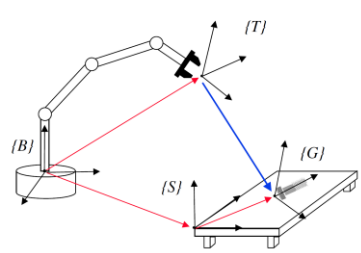
$${}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$$

Representação
Equações de transformação

- Utilizadas para resolver transformações no caso de *n* equações de transformações, e *n* transformações desconhecidas
- No caso anterior, se ${}^{B}_{C}T$ fosse desconhecido

$${}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T\,{}^{C}_{D}T^{-1}$$

Representação
Equações de transformação



Operadores

- As mesmas formas matemáticas para mapear pontos entre referenciais, também podem ser interpretadas como operadores
- Translação, Rotação, Ambos

Operadores
Translacional

- Move um ponto no espaço ao longo da direção de um vetor por uma distância finita
- Características
  - Apenas um sistema de coordenadas envolvido
  - Mesma formulação do mapeamento
  - Interpretações
    - O vetor se move "para frente"
    - O referencial se move "para trás"

Operadores
Translacional

- O vetor ${}^AP_1$ é transladado por um vetor ${}^AQ$

$${}^AP_2 = {}^AP_1 + {}^AQ$$

- Na forma de um operador matricial

$${}^AP_2 = D_Q(q)\,{}^AP_1$$

- onde
  - q : Magnitude (com sinal) da translação
  - $\hat{Q}$: Direção do eixo que ocorre a translação

Operadores
Translacional

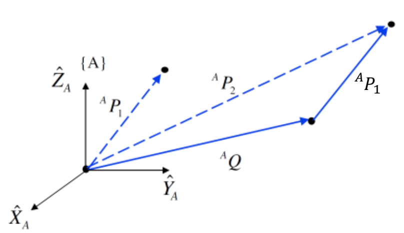
- O operador D_Q pode ser interpretado como uma transformação homogênea simples

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- onde q_x, q_y e q_z são as componentes de Q e

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

Operadores
Translacional



Operadores
Rotacional

- Muda um vetor ${}^AP_1$ por uma rotação R

$${}^AP_2 = R\,{}^AP_1$$

- Não está relacionando dois referenciais
  - Por isso não utiliza subscrito ou sobrescrito

Operadores
Rotacional

- Na forma de um operador matricial

$$^{A}P_2 = R_K(\theta)\,^{A}P_1$$

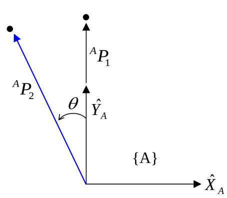
- Onde
  - θ : Valor em graus da rotação
  - $\hat{K}$: Direção do eixo de rotação

Operadores
Rotacional

- A matriz que rotaciona um vetor por meio de alguma rotação R, é equivalente à matriz de rotação que descreve um referencial rotacionado de R relativo a um referencial de referência

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores
Rotacional



Operadores
Transformação

- Interpretação diferente de referenciais
  - Vetores de posição e matrizes de rotação
- Transformação = Rotação + Translação
- Apenas um sistema de coordenadas
  - Sem subscrito ou sobrescrito

$$^{A}P_2 = T\,^{A}P_1$$

Operadores
Transformação

- A transformação que rotaciona de R e translada de Q é equivalente à transformação que descreve um referencial rotacionado de R e transladado de Q em relação ao referencial de referência

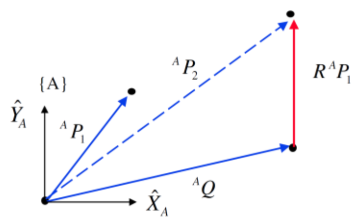
Operadores
Transformação (Exemplo)

- Deseja-se rotacionar o vetor $^{A}P_1$ de $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladá-lo 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Determine T e $^{A}P_2$.

$$^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_2 = T\,^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}$$

Operadores
Transformação (Exemplo)



Resumo das interpretações
Transformação homogênea

- Descrição de um referencial
  - A transformação ${}^A_B T$ descreve o referencial {B} em relação ao referencial {A}. Especificamente, as colunas de ${}^A_B R$ são vetores unitários que definem as direções dos eixos principais de {B}, e $^A P_{BORG}$ localiza a posição da origem de {B}.

Resumo das interpretações
Transformação homogênea

- Mapeamento
  - A transformação ${}^A_B T$ mapeia $^B P \rightarrow {}^A P$
- Operador
  - A transformação T opera em $^A P_1$ produzindo $^A P_2$

Representações de orientação

- Translações são fáceis de visualizar
- Rotações não são tão intuitivas
  - Difíceis de descrever e especificar
  - Fechada sobre a multiplicação

$$ {}^A_C R = {}^A_B R\,{}^B_C R $$

  - Não é comutativa

$$ {}^A_B R\,{}^B_C R \neq {}^B_C R\,{}^A_B R $$

Representações de orientação

- Considere duas rotações de $\theta = 30^\circ$, uma em torno de $\hat{Z}_A$ e outra em torno de $\hat{X}_A$.

$$ R_z(30) = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix} \quad R_x(30) = \begin{bmatrix} 1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}000 & 0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix} $$

$$ R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}43 & 0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}43 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}87 \end{bmatrix} \quad R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}50 & 0{,}00 \\ 0{,}43 & 0{,}75 & -0{,}50 \\ 0{,}25 & 0{,}43 & 0{,}87 \end{bmatrix} $$

Representações de orientação

- Matriz de rotação 3×3
  - Colunas mutuamente ortogonais
  - Colunas com magnitude 1 (vetor unitário)

$$ {}^A_B R\,{}^A_B R^T = 1 $$

  - Matriz ortonormal própria (determinante = 1)
- É possível representar uma rotação em 3D utilizando menos que 9 parâmetros?

Representações de orientação

- Fórmula de Cayley
  - Dada uma matriz ortonormal própria R, existe uma matriz S (*skew-symmetric*), tal que:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

- Matriz *skew-symmetric*

$$S = -S^T$$

Representações de orientação

- Uma matriz *skew-symmetric* de dimensão 3 é especificada por 3 parâmetros (s_x, s_y, s_z)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz de rotação 3 × 3 poderá ser especificada por apenas 3 parâmetros!

Representações de orientação

- Os nove elementos de uma matriz rotacional não são todos independentes

$$R = [\hat{X} \;\; \hat{Y} \;\; \hat{Z}]$$

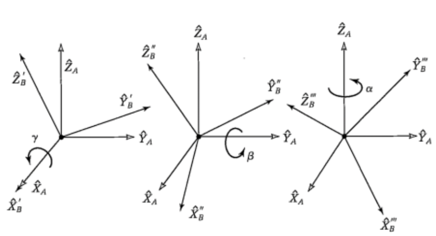
- É possível representá-los como:

$$|\hat{X}| = 1 \qquad \hat{X}\cdot\hat{Y} = 0$$
$$|\hat{Y}| = 1 \qquad \hat{X}\cdot\hat{Z} = 0$$
$$|\hat{Z}| = 1 \qquad \hat{Y}\cdot\hat{Z} = 0$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

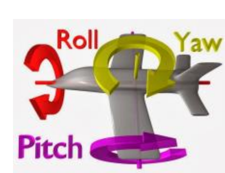
- Descrição
  - Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de $\hat{X}_A$ de um ângulo γ, em seguida em torno de $\hat{Y}_A$ de um ângulo β, e finalmente em torno de $\hat{Z}_A$ de um ângulo α.

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z



Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Também conhecido por *roll*, *pitch* e *yaw*
  - Muito utilizado em aviação, náutica e robótica



Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Rotação de γ em torno de $\hat{X}_A$ (*roll*)
  - Projeção da descrição dos vetores unitários que representam {B} nos vetores unitários de {A}

$$
{}^{A}_{B}R_x(\gamma)=\begin{bmatrix}\hat{X}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{X}_B\\ \hat{X}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Y}_B\\ \hat{X}_A\cdot\hat{Z}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Z}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Z}_B\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma)\\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma)\end{bmatrix}
$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
=\begin{bmatrix}c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\gamma & -s\gamma\\ 0 & s\gamma & c\gamma\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma\\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma\\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta s\gamma\end{bmatrix}
$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Problema inverso
  - Como obter os ângulos a partir da matriz?

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}
$$

$$\beta=\text{atan2}(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2})$$

$$\alpha=\text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta},\frac{r_{11}}{c\beta}\right)$$

$$\cos\beta=\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}$$

$$\gamma=\text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta},\frac{r_{33}}{c\beta}\right)$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Problema inverso – Casos Especiais

$$\beta=90^\circ \qquad \alpha=0 \qquad \gamma=\text{atan2}(r_{12},r_{22})$$

$$\beta=-90^\circ \qquad \alpha=0 \qquad \gamma=\text{atan2}(r_{12},r_{22})$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- $\text{atan2}(y,x)$
  - Similar a $\tan^{-1}(y/x)$, porém utiliza o sinal de x e y para determinar o quadrante que contém o ângulo resultante
  - Exemplo:

$$\text{atan2}(-2,-2)=-135^\circ$$

$$\text{atan2}(2,2)=45^\circ$$

Representações de orientação
Outras descrições

- Ângulos de Euler Z-Y-X
  - Cada rotação é realizada sobre o eixo de {B}
  - Referencial móvel, depende das rotações
- Ângulos de Euler Z-Y-Z
  - Produzem o mesmo resultado na ordem oposta
- Ângulo-Eixo equivalente
  - Rotação em torno de um eixo genérico (vetor)

Considerações computacionais

- Considere as seguintes rotações sobre ${}^{D}P$:

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}_{C}R \, {}^{C}_{D}R \, {}^{D}P$$

- Qual a forma mais eficiente de realizá-las?
  - Existe diferença?
  - A ordem das transformações podem fazer grande diferença no tempo computacional!

Considerações computacionais

- Uma opção é agrupar em uma única matriz

$${}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}_{C}R \, {}^{C}_{D}R \quad \Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{D}R \, {}^{D}P$$

- O cálculo de ${}^{A}_{D}R$ requer
  - 54 multiplicações e 36 adições
- A operação final sobre ${}^{D}P$
  - 9 multiplicações e 6 adições

Considerações computacionais

- E se a operações forem realizadas na ordem?

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}_{C}R \, {}^{C}_{D}R \, {}^{D}P$$
$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}_{C}R \, {}^{C}P$$
$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P$$
$${}^{A}P = {}^{A}P$$

- Total de operações
  - 27 multiplicações e 18 adições

Considerações computacionais

- Cada caso é um caso!
- Se as relações entre as matrizes de rotação forem constantes e existir uma grande quantidade de ${}^{D}P_i$ que devem ser transformados em ${}^{A}P_i$
  - Será mais eficiente pré-calcular ${}^{A}_{D}R$