UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

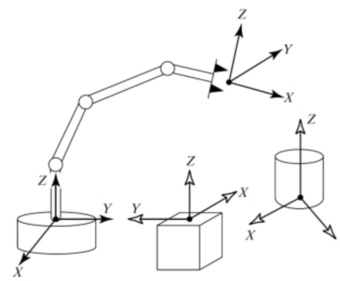
Introdução à Robótica
Descrição espacial e Transformações

Prof. Douglas G. Macharet / Renato Martins
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

VERLab Visão e Robótica — DCC Departamento de Ciência da Computação

---

Introdução



Introdução

Calibração de Sensores

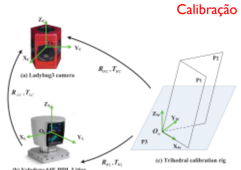
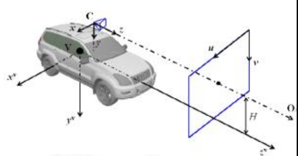


Imagem cortesia de Xiaojin Gong (2013)



Reconstrução (mapeamento 3D)

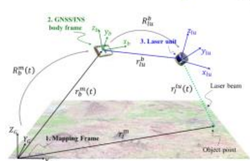


Imagem cortesia de Radhika Ravi (2018)

Introdução

- Posições e Orientações (ou **pose**)
  - Partes, ferramenta e do próprio manipulador
- É necessário adotar uma convenção geral
- Sistema de coordenadas geral
  - Relação com os sistemas de coordenadas locais

Introdução
Objetivos

- Descrever movimento de **corpos rígidos** no espaço 3D
  - **Corpo rígido:** Forma e dimensões (tamanho) não se alteram
- **Sistema de coordenadas** universal
  - Transformações entre os referenciais

Introdução
Notação

- Vetores e matrizes
  - Letra maiúscula (M, P, R, T, X, Y, ...)
- Escalares
  - Letra minúscula (m, p, r, t, x, y, ...)
- Referenciais
  - Sobrescrito e subscrito <u>precedentes</u> $^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$

Representação

- Descrição de posição
- Descrição de orientação
- Descrição de sistema de referência

Descrição de Posição

Representação
Descrição de posição

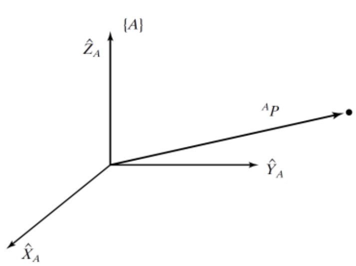
- Um vetor localiza um ponto no espaço 3D
- O vetor deve conter informações sobre qual sistema de coordenadas ele está definido

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Representação
Descrição de posição

- Um sistema de coordenadas é representado por uma letra maiúscula entre chaves, ex. {A}
- Vetores unitários que indicam as principais direções do sistema de coordenadas usam a notação "chapeu" (^)
  - Eixos principais

Representação
Descrição de posição



$$\hat{X}_A \times \hat{Y}_A = \hat{Z}_A$$
$$\hat{Y}_A \times \hat{Z}_A = \hat{X}_A$$
$$\hat{Z}_A \times \hat{X}_A = \hat{Y}_A$$

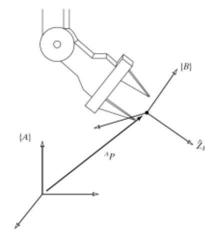
$$\hat{X}_A \cdot \hat{X}_A = \|\hat{X}_A\| = 1$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Y}_A = 0$$
$$\hat{X}_A \cdot \hat{Z}_A = 0$$

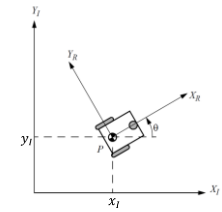
Descrição de Orientação

Representação
Descrição de orientação

- Descrever um corpo rígido utilizando um ponto pode não ser muito representativo
- É importante representar a orientação
- Descrita a partir de um sistema de coordenadas <u>afixado no próprio corpo</u> em relação a outro sistema de coordenadas

Representação
Descrição de orientação





Representação
Descrição de orientação

- Matriz de rotação de {B} em relação a {A}

$$^A_BR = \left[{}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

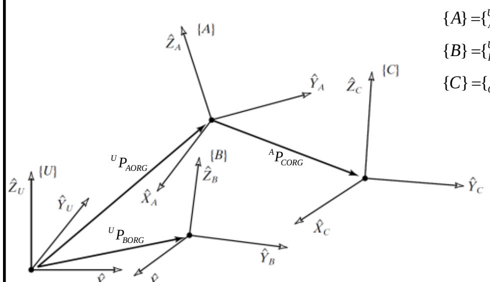
- ${}^A\hat{X}_B$: Vetor unitário do eixo X do sistema {B} descrita no sistema {A}

Representação
Descrição de orientação

- **Orientação: 3 graus de liberdade** e com várias representações possíveis
- Matriz de rotação, quaternions, screws, ...
- **Matriz de rotação**: (grupo especial ortogonal SO(3))
  - Inverso de uma matriz de rotação é igual à sua transposta $\quad {}^A_BR = {}^B_AR^{-1} = {}^B_AR^T$
  - Matriz ortogonal: Colunas (ou linhas) são vetores ortonormais

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

$$\{A\} = \{{}^U_AR, {}^UP_{AORG}\}$$
$$\{B\} = \{{}^U_BR, {}^UP_{BORG}\}$$
$$\{C\} = \{{}^A_CR, {}^AP_{CORG}\}$$

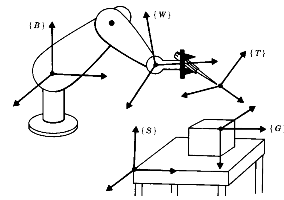


Mapeamentos e Frames

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

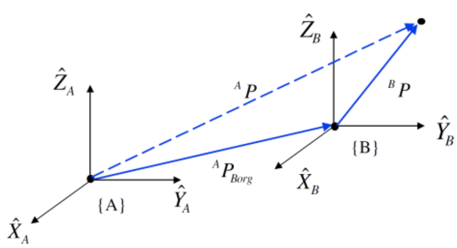
- Existem diversos sistemas de referências
  - Sistema de coordenadas do mundo
  - Sistema de coordenadas do robô
  - Sistema de coordenadas de um sensor
  - Sistema de coordenadas de um objeto

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)



- **Mapeamentos**: Como descrever a posição de um ponto no referencial {B} dada a sua descrição em {T}?

Representação
Mapeamentos – Translação



Representação
Mapeamentos – Translação (Exemplo)

- Dados 2 referenciais {A} e {B} com mesma orientação, porém a origem de {B} está deslocada 7 unidades da origem de {A} ao longo do eixo $\hat{X}_A$ e 2 unidades ao longo do eixo $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^B P$, defina ${}^A P_{BORG}$ e ${}^A P$.

$$ {}^B P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T $$

$$ {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T $$

$$ {}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} $$

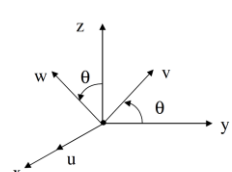
Representação
Mapeamentos – Rotação

- Referenciais com a mesma origem, porém com orientações diferentes

- Mapeamento:

$$ {}^A P = {}^A_B R \, {}^B P $$

Representação
Mapeamentos – Rotação



$$ R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot i_v & i_x \cdot i_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot i_v & j_y \cdot i_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot i_v & k_z \cdot i_w \end{bmatrix} \qquad R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

Representação
Exercício:

- Obtenha as matrizes de rotação 3D (R) entre dois sistemas de coordenadas para os seguintes casos:
  - A) Rotação de θ em Z. Particularize R para θ = π/4.
  - B) Rotação de θ em Y. Particularize R para θ = -π.

Representação
Mapeamentos – Rotação

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Rotação (Exemplo)

- Um referencial {B} está rotacionado de $\theta = 30^\circ$ em relação ao eixo $\hat{Z}_A$ do referencial {A}. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P$.

$${}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix}$$

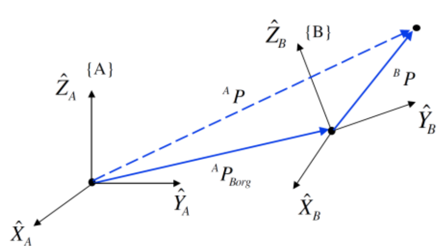
$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} -1{,}000 \\ 1{,}732 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}$$

Representação
Mapeamentos – Translação+Rotação

- Referenciais com origens e orientações diferentes. Considera-se duas etapas:
  - Descrever o ponto ${}^{B}P$ em relação a um referencial intermediário, com mesma orientação que {A}, mas origem igual a {B} — Rotação
  - Somar a diferença entre as origens — Translação

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

Representação
Mapeamentos – Translação+Rotação



Representação
Coordenadas homogêneas

- Matrizes de transformações homogêneas
  - Forma mais elegante de compor transformações
  - Rotações e translações

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \Rightarrow {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

Representação
Transformação homogênea

$$\left[\begin{array}{ccc:c} r_1 & r_2 & r_3 & \Delta x \\ r_4 & r_5 & r_6 & \Delta y \\ r_7 & r_8 & r_9 & \Delta z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rotação

Translação

Perspectiva

Escala

Representação
Transformação homogênea (Exemplo)

- Seja {B} um referencial rotacionado $\theta = 30^\circ$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 5 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}T$ e ${}^{A}P$.

$${}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}$$

Representação
Transformações compostas

- O referencial {C} é conhecido em relação a {B}, e o referencial {B} é conhecido em relação a {A}. Como obter ${}^{A}P$, a partir de ${}^{C}P$?
  - 1) ${}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$
  - 2) ${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$

$\Rightarrow$ ${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$

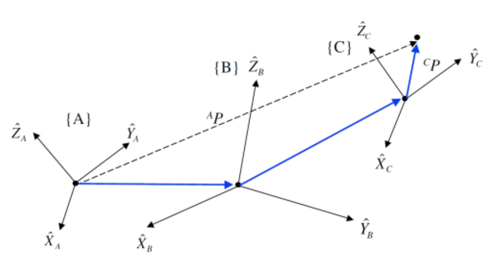
- Pode-se então, definir:

$${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T$$

Representação
Transformações compostas

$${}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]$$

Representação
Transformações compostas



Mapeamento Inverso

Representação
Invertendo uma transformação

- Dado um referencial {B} conhecido em relação a {A}, ou seja, ${}^A_B T$ é conhecido
- Como fazer se quisermos o contrário?
  - Descrição de {A} em relação a {B}
  - Deseja-se obter ${}^B_A T$
- Pode-se calcular a inversa da matriz 4×4
  - Não é o mais eficiente computacionalmente

Representação
Invertendo uma transformação

- Como ser mais eficiente?
  - Estrutura inerente à transformação
- Para se obter ${}^B_A T$,deve-se calcular ${}^B_A R$ e ${}^B P_{AORG}$ a partir de ${}^A_B R$ e ${}^A P_{BORG}$
- Como visto anteriormente

$${}^B_A R = {}^A_B R^T$$

Representação
Invertendo uma transformação

- A descrição de ${}^A P_{BORG}$ em {B} é dada por

$${}^B({}^A P_{BORG}) = {}^B_A R \, {}^A P_{BORG} + {}^B P_{AORG}$$

- O lado esquerdo da equação será zero

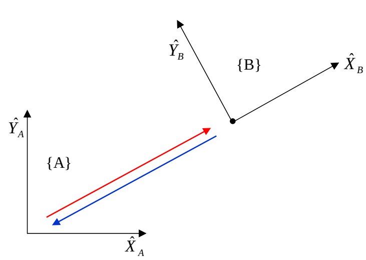
$${}^B P_{AORG} = -{}^B_A R \, {}^A P_{BORG} = -{}^A_B R^T \, {}^A P_{BORG}$$

Representação
Invertendo uma transformação

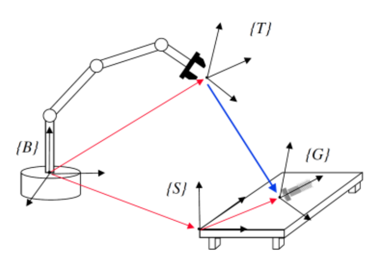
$${}^B_A T = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^A_B R^T & & -{}^A_B R^T \, {}^A P_{BORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$${}^B_A T = {}^A_B T^{-1}$$

Representação
Invertendo uma transformação (Exemplo)



Representação
Equações de transformação



Operadores

- O mapeamento <u>não altera</u> a posição do ponto, ele apenas muda a <u>descrição</u> de um ponto de um sistema de coordenadas para outro!
- As mesmas formas matemáticas para <u>mapear</u> pontos entre referenciais, também podem ser interpretadas como <u>operadores</u>
- Translação, Rotação, ou ambos

Operadores
Transformação

- Interpretação diferente de referenciais
  - Vetores de posição e matrizes de rotação
- Transformação = Rotação + Translação
- Apenas um sistema de coordenadas
  - Sem subscrito ou sobrescrito

$$^{A}P_2 = T\,^{A}P_1$$

Operadores
Transformação

- A transformação que rotaciona de R e translada de Q é equivalente à transformação que descreve um referencial rotacionado de R e transladado de Q em relação ao referencial de referência

Representações de orientação

- Translações são fáceis de visualizar
- Rotações não são tão intuitivas
  - Difíceis de descrever e especificar
  - Fechada sobre a multiplicação

$$^{A}_{C}R = ^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R$$

  - Não é comutativa

$$^{A}_{B}R\,^{B}_{C}R \neq ^{B}_{C}R\,^{A}_{B}R$$

Representações de orientação

- Matriz de rotação 3×3
  - Colunas mutuamente ortogonais
  - Colunas com magnitude 1 (vetor unitário)

$$^{A}_{B}R\,^{A}_{B}R^{T} = 1$$

  - Matriz ortonormal própria (determinante = 1)
- É possível representar uma rotação em 3D utilizando menos que 9 parâmetros?

Representações de orientação

- Fórmula de Cayley
  - Dada uma matriz ortonormal própria R, existe uma matriz S (*skew-symmetric*), tal que:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

- Matriz *skew-symmetric*

$$S = -S^{T}$$

Representações de orientação

- Uma matriz *skew-symmetric* de dimensão 3 é especificada por 3 parâmetros (s_x, s_y, s_z)

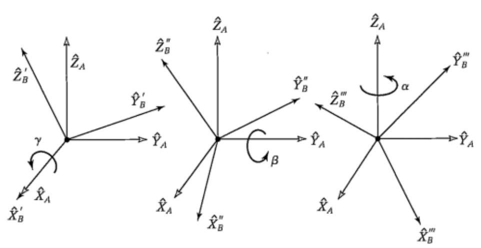
$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz de rotação 3×3 poderá ser especificada por apenas 3 parâmetros!

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Descrição
  - Iniciar com o referencial {B} coincidente com um referencial conhecido {A}. Primeiramente, rotacione {B} em torno de $\hat{X}_A$ de um ângulo γ, em seguida em torno de $\hat{Y}_A$ de um ângulo β, e finalmente em torno de $\hat{Z}_A$ de um ângulo α.
  - IMPORTANTE: Se a rotação é dada no referencial anterior, a multiplicação é pela esquerda. Caso contrário, se a transformação for dada no referencial atual a multiplicação será pela direita.

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z



Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

$${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta s\gamma \end{bmatrix}$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Também conhecido por *roll*, *pitch* e *yaw*
  - Muito utilizado em aviação, náutica e robótica

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Problema inverso
  - Como obter os ângulos a partir da matriz?

$${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

$$\alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right)$$

$$\cos\beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}$$

$$\gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right)$$

Representações de orientação
Ângulos fixos X-Y-Z

- Problema inverso – Casos Especiais

$$\beta = 90^\circ$$
$$\alpha = 0$$
$$\gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -90^\circ$$
$$\alpha = 0$$
$$\gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

Representações de orientação
Outras descrições

- Ângulos de Euler Z-Y-X
  - Cada rotação é realizada sobre o eixo de {B}
  - Referencial móvel, depende das rotações
- Ângulos de Euler Z-Y-Z
  - Produzem o mesmo resultado na ordem oposta
- Ângulo-Eixo equivalente
  - Rotação em torno de um eixo genérico (vetor)

Representações de orientação
Exercício:

- Mostre que a matriz de rotação usando Euler ZYX(α,β,y) é equivalente à matriz usando RPY(y,β,α) (Roll, Pitch, Yaw).