

Modelos Probabilísticos de Desempenho

Profa. Jussara M. Almeida
1º Semestre de 2014

Modelos Probabilísticos

- Processos Estocásticos
 - Processos de Poisson
 - Filas $M/M/1$, $M/G/1$...
- Mais genericamente: modelos markovianos
 - Qual a probabilidade de um sistema estar em um determinado estado?
 - Quantos e quais são os estados?
 - Quais as probabilidades de transição entre pares de estados?

Modelos Markovianos

Exemplo : Servidor de Banco de Dados

- Computador com uma CPU e dois discos rodando um servidor de banco de dados.
- Para manter QoS, apenas 2 usuários no banco de dados por vez
- Um disco é 2x mais rápido que o outro
- Transação típica:
 - 10 seg. de CPU
 - 15 seg. no disco rápido (caso arquivo neste disco)
 - 30 seg no disco lento
- Transações têm igual probabilidade de encontrar os arquivos requisitados em qualquer um dos discos

Modelos Markovianos

Exemplo : Servidor de Banco de Dados

- Perguntas:
 - Usuário: Qual o tempo de resposta típico?
 - Administrador do sistema: Qual a utilização de cada recurso do sistema?
 - Presidente da companhia: Qual desempenho do sistema se eu dobrar o número de usuários ativos no sistema
 - Qual o tempo de resposta se eu tiver que migrar todos os arquivos do disco mais rápido para o mais lento?

Construção de Modelos Markovianos

Servidor de Banco de Dados

- Definição dos estados: (X,Y,Z)
 - $X = \#$ usuários na CPU
 - $Y = \#$ usuários no disco rápido
 - $Z = \#$ usuários no disco lento
 - $(2,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,2,0), (0,1,1), (0,0,2)$
 - Outras opções de estados podem ser mais complicadas

Construção de Modelos Markovianos

Servidor de Banco de Dados

- Definição das transições entre estados
 - Se em estado $(2,0,0)$, um usuário na CPU pode terminar processamento e ir para disco rápido (estado $(1,1,0)$) ou para o disco lento (estado $(1,0,1)$)
 - Se em estado $(1,1,0)$, ou usuário no disco rápido termina e vai para CPU (estado $(2,0,0)$), ou usuário na CPU vai para um dos discos (estado $(0,1,1)$ ou $(0,2,0)$)
 - Se em estado $(1,0,1)$, ou usuário no disco lento termina e vai para CPU (estado $(2,0,0)$), ou usuário na CPU vai para um dos discos (estado $(0,1,1)$ ou $(0,0,2)$)
 - Se ambos usuários no disco rápido/lento (estado $(0,2,0)$ / $(0,0,2)$) um usuário termina e vai para CPU (estado $(1,1,0)$ / $(1,0,1)$)
 - Se em estado $(0,1,1)$, ou usuário do disco rápido retorna à CPU (estado $(1,0,1)$) ou usuário do disco lento retorna à CPU (estado $(1,1,0)$)

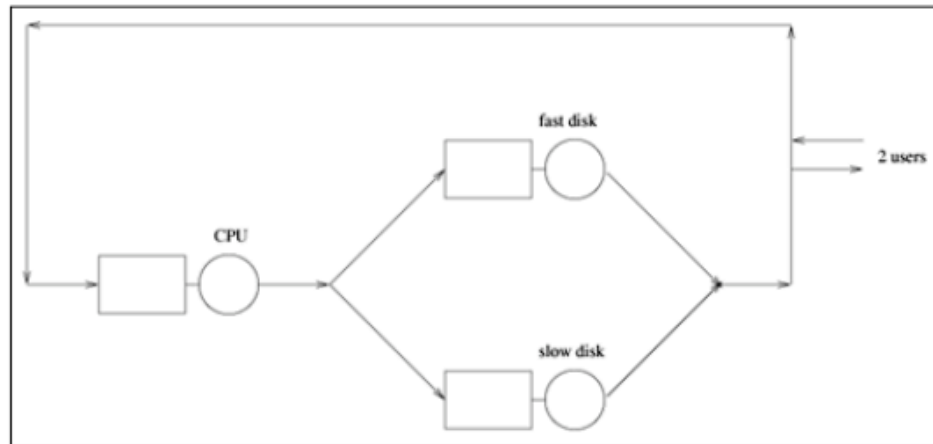
Construção de Modelos Markovianos

Servidor de Banco de Dados

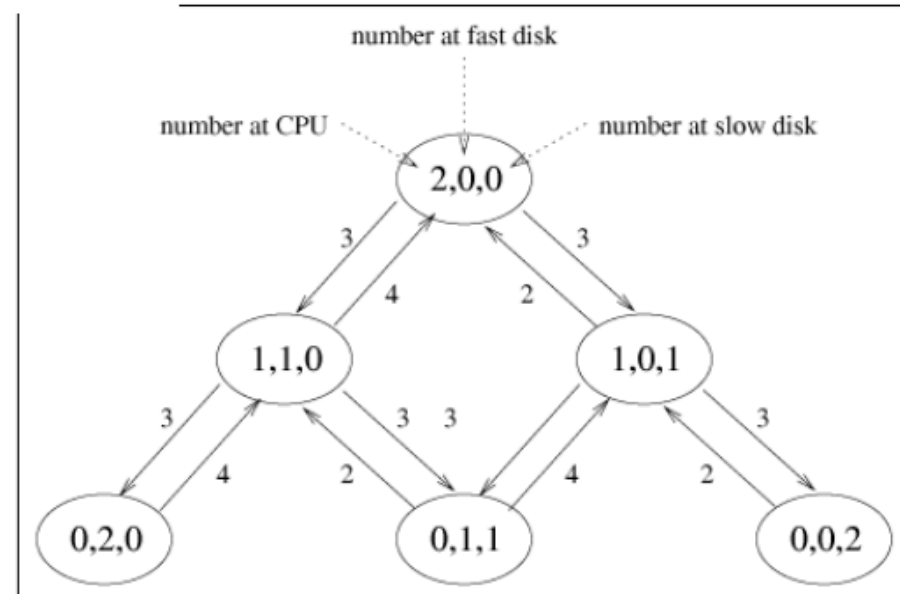
- Parametrização: taxas
 - Se em estado $(2,0,0)$:
 - CPU ativa atende requisições de usuários à taxa de 6 transações por min (cada uma tem demanda de 10 seg)
 - Cada transação pode acessar arquivos em qualquer disco com igual probabilidade: taxa com que usuário migra da CPU para disco rápido/lento = 3
 - Peso entre $(2,0,0)$ e $(1,0,1)$ = 3 (= para $(2,0,0)$ e $(1,1,0)$)
 - Se em estado $(1,1,0)$:
 - Usuário deixa a CPU a uma taxa 6, metade do tempo indo para disco lento, metade para disco rápido
 - $(1,1,0) \rightarrow (0,2,0) = (1,1,0) \rightarrow (0,1,1) = 3$
 - Disco rápido satisfaz requisição a uma taxa de 4 transações por minuto (cada uma tem demanda de 15 segundos) :
 - $(1,1,0) \rightarrow (2,0,0) = 4$

Construção de Modelos Markovianos

Figure 10.3. Database server example.



Markov Model of the database server example.



Solução de Modelos Markovianos

- Objetivo: achar as probabilidades a longo prazo de estar em cada estado particular
 - Estado estacionário independe do estado inicial do sistema
- Como fazer?
 - Utilizar conjunto de equações de equilíbrio lineares
 - N estados $\rightarrow$ N incógnitas (probabilidades) $\rightarrow$ N equações
 - Equações derivadas a partir dos fluxos entrando e saindo de cada estado
 - fluxo entrando = fluxo saindo (para cada estado)
 - Equação da conservação da probabilidade total
 - Soma das probabilidades a longo prazo = 1

Solução de Modelos Markovianos

$$(4 \times P_{(1,1,0)}) + (2 \times P_{(1,0,1)}) = 6 \times P_{(2,0,0)}$$

$$(3 \times P_{(2,0,0)}) + (4 \times P_{(0,2,0)}) + (2 \times P_{(0,1,1)}) = 10 \times P_{(1,1,0)}$$

$$(3 \times P_{(2,0,0)}) + (4 \times P_{(0,1,1)}) + (2 \times P_{(0,0,2)}) = 8 \times P_{(1,0,1)}$$

$$3 \times P_{(1,1,0)} = 4 \times P_{(0,2,0)}$$

$$(3 \times P_{(1,1,0)}) + (3 \times P_{(1,0,1)}) = 6 \times P_{(0,1,1)}$$

$$3 \times P_{(1,0,1)} = 2 \times P_{(0,0,2)}$$

$$P_{(2,0,0)} + P_{(1,1,0)} + P_{(1,0,1)} + P_{(0,2,0)} + P_{(0,1,1)} + P_{(0,0,2)} = 1$$

$$P_{(2,0,0)} = 0.1391 \quad P_{(0,2,0)} = 0.0783$$

$$P_{(1,1,0)} = 0.1043 \quad P_{(0,1,1)} = 0.1565$$

$$P_{(1,0,1)} = 0.2087 \quad P_{(0,0,2)} = 0.3131$$

Interpretando resultados...

Servidor de Banco de Dados

- Qual o tempo de resposta típico?

Lei de Little: $R = N / X$ $N = 2$, $X = ?$

Medir X na saída da CPU: $U_{cpu} = X \times S_{cpu} \rightarrow X = U_{cpu} \times 1/S_{cpu}$

U_{cpu} = soma das probs de todos estados onde
há pelo menos 1 usuário na CPU:

$$U_{cpu} = P_{(2,0,0)} + P_{(1,0,1)} + P_{(1,1,0)} = 0.1391 + 0.2987 + 0.1043 = 0.4521$$

$1/S_{cpu}$ = service rate = 6 transações por minuto

$X = 0.4521 \times 6 = 2.7126$ transações por min.

$R = 2/2.7126 = 0.7373$ minutos / transação

Interpretando resultados...

Servidor de Banco de Dados

- Qual a utilização de cada dispositivo?

$$U_{\text{cpu}} = P_{(2,0,0)} + P_{(1,0,1)} + P_{(1,1,0)} = \\ 0.1391 + 0.2987 + 0.1043 = 0.4521$$

$$U_{\text{fast_disk}} = P_{(1,1,0)} + P_{(0,2,0)} + P_{(0,1,1)} = \\ 0.1043 + 0.0783 + 0.1565 = 0.3391$$

$$U_{\text{slow_disk}} = P_{(1,0,1)} + P_{(0,0,2)} + P_{(0,1,1)} = \\ 0.2087 + 0.1565 + 0.3131 = 0.6783$$

Interpretando resultados...

Servidor de Banco de Dados

- Qual desempenho se dobrar número de clientes ativos
 - Solucionar novo modelo com 15 estados (4 clientes ativos)
- Qual desempenho se migrar todos arquivos para disco lento?
 - Solucionar novo modelo com 3 estados (2,0), (0,2) e (1,1)

Premissas e Limitações

- Premissa de memoryless / sem memória:
 - Cada estado captura todas as infos importantes do sistema.
 - Próximo estado só depende do estado corrente (e não dos estados anteriores)
- Limitação resultante:
 - Possível explosão do espaço de estados
 - Se ordem é importante, se jobs são distintos (múltiplas classes), estado tem que capturar isto:
Ex: 10 classes de clientes na CPU , FIFO (ordem importa):
número de estados = $10! = 3.6$ milhões.
 - Se jobs estatisticamente iguais: estado pode ser identificado por um número (# clientes na CPU)

Premissas e Limitações

- Premissa exponencial:
 - Tempo gasto entre eventos relevantes (tempo gasto em um estado) segue distribuição exponencial : modelos de markov com tempo contínuo (servidor de banco de dados)

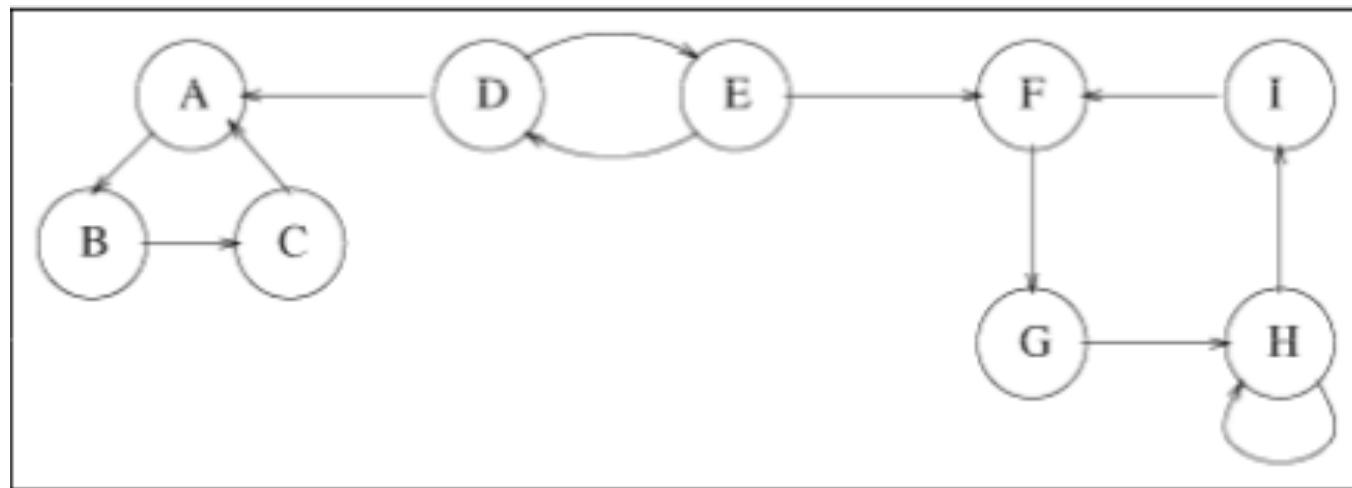
$$\text{Prob}(T > s + t \mid T > s) = \text{Prob}(T > t)$$

- Limitação resultante:
 - Exponencial pode não ser uma boa aproximação
 - Possível solução: estágios (cada estágio é um estado)
 - Outras distribuições podem ser aproximadas
 - Custo: explosão de estados

Conceitos Avançados

- Estado recorrente: estado que *pode* sempre ser revisitado no futuro após deixá-lo, independentemente dos estados visitados em seguida
- Estado transiente: dependendo dos próximos estados visitados, pode não ser possível retornar a um estado transiente.
- Fato: Cada estado em um modelo de Markov ou é transiente ou é recorrente
- Fato: Todos estados alcançáveis a partir de um estado recorrente são recorrentes
- Fato: Todos estados dos quais se podem alcançar um estado transiente são transientes.

Conceitos Avançados



A, B, C, F, G, H e I: estados recorrentes
D e E: estados transientes

Conceitos Avançados

- Estado periódico: estado recorrente onde o sistema só pode retornar a ele em $p, 2p, 3p \dots$ passos, onde p é o período ($p > 1$)
- Fato: Todos estados alcançáveis de um estado periódico são periódicos com mesmo período
- Cadeia: conjunto de estados recorrentes que podem alcançar uns aos outros.
- Estados discretos, transições discretas/contínuas
 - Transições discretas: ocorrem somente em intervalos conhecidos
 - Transições contínuas: podem ocorrer em qualquer instante, em intervalos exponencialmente distribuídos
- Fato: modelos de Markov com transições contínuas não têm estados periódicos

Conceitos Avançados

- Fato principal:

Qualquer modelo de Markov finito sem estados periódicos e cujos estados recorrentes estão todos na mesma cadeia terão probabilidades a longo prazo que independem do estado inicial. Isto é, o modelo tem estado estacionário

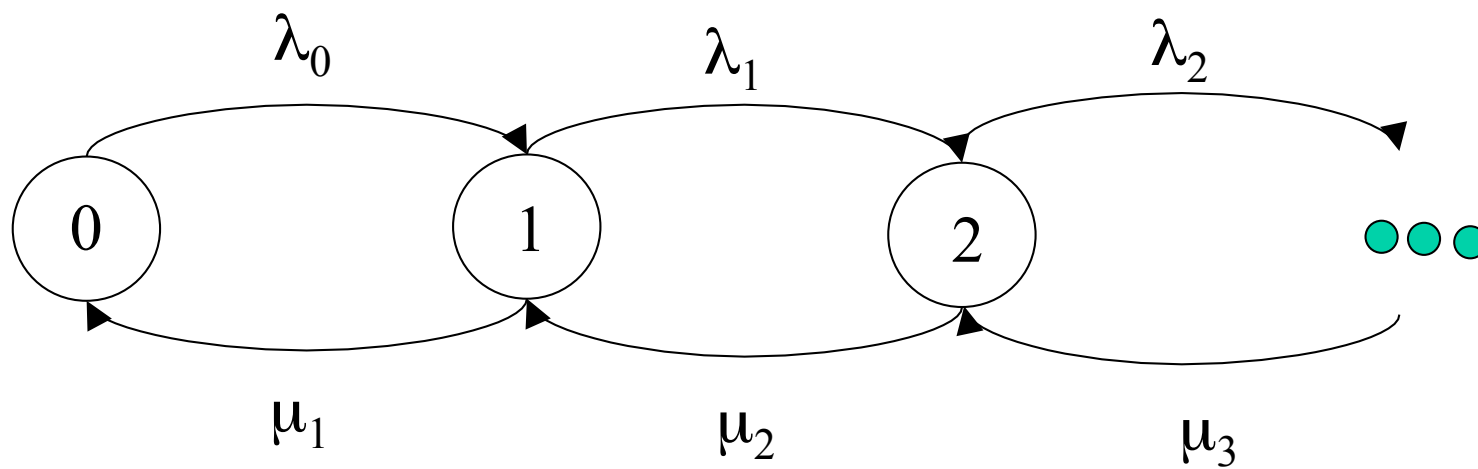
Os modelos de Markov de interesse são aqueles que têm comportamento estacionário definido.

- Fato: a probabilidade estacionária de um estado transiente é 0.

Modelos Birth-Death

- Classe de modelos de Markov com solução geral.
- Dado um sistema em um estado k (onde k indica o número de clientes no sistema), um de dois eventos pode ocorrer para mudar o estado
 - Birth: chegada de novo cliente $\rightarrow$ estado $k+1$
 - Death: saída de um cliente do sistema $\rightarrow$ estado $k-1$
- Taxa de chegadas de novos clientes quando sistema está no estado $k = \lambda_k$ (exponencial)
- Taxa de saídas de clientes (término de execução) quando sistema está no estado $k = \mu_k$ (exponencial)

Modelos Birth-Death



Solução de Modelos Birth-Death

Fluxo entrando = fluxo saindo

$$\mu_1 \times P_1 = \lambda_0 \times P_0$$

$$\lambda_0 \times P_0 + \mu_2 \times P_2 = \lambda_1 \times P_1 + \mu_1 \times P_1$$

.....

$$\lambda_{k-1} \times P_{k-1} + \mu_{k+1} \times P_{k+1} = \lambda_k \times P_k + \mu_k \times P_k$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

$$P_k = P_{k-1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Solução de Modelos Birth-Death

$$\text{Utilização} = P_1 + P_2 + \dots = 1 - P_0$$

Estado estacionário existe se $P_0 > 0$

$$\text{Throughput} = \mu_1 \times P_1 + \mu_2 \times P_2 + \dots$$

$$\text{Tamanho da fila} = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \dots + kP_k + \dots$$

$$\text{Tempo de resposta} = \text{Tamanho da fila} / \text{throughput}$$

Exercício

Um ISP tem banda suficiente para manter até m conexões abertas simultaneamente. Requisições por conexão chegam a uma taxa λ req/s, e conexão permanece ativa por em média $1/\mu$ segundos

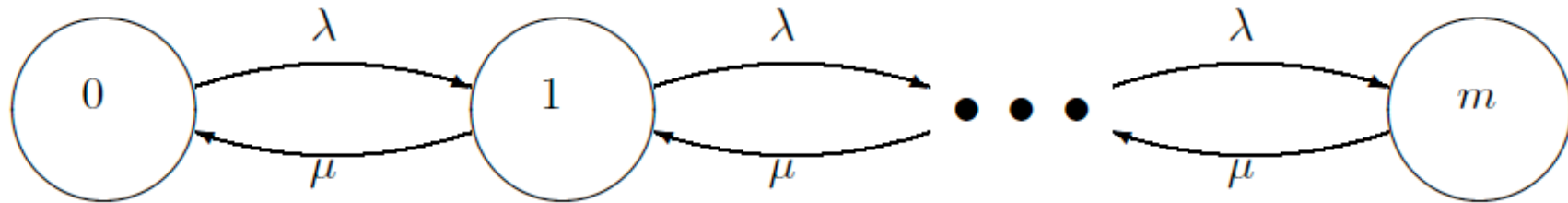
Desenhe um diagrama de estados para representar o desempenho do ISP em função da carga

Apresente uma expressão para a probabilidade de que o ISP atenda k conexões simultaneamente ($k \geq 1$).

Apresente uma expressão para a probabilidade de que um cliente não consiga conectar por limitação da banda do ISP.

Exercício

Desenhe um diagrama de estados para representar o desempenho do ISP em função da carga



Exercício

Apresente uma expressão para a probabilidade de que o ISP atenda k conexões simultaneamente.

Vamos usar a expressão para modelos birth&death genéricos:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)^{-1}$$
$$P_k = P_{k-1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad k = 1, 2, \dots$$
$$P_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)^{-1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Para o exemplo :

$$P_k = \left(\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \quad k = 1, 2, \dots, m$$
$$P_k = \frac{\lambda^k / \mu^k}{1 + \lambda / \mu + \dots + \lambda^m / \mu^m} = \frac{\lambda^k \mu^{m-k}}{\mu^m + \lambda \mu^{m-1} + \dots + \lambda^m}$$

Exercício

Apresente uma expressão para a probabilidade de que um cliente não consiga conectar por limitação da banda do ISP.

$$P_{\text{busy}} = P_m$$

$$P_{\text{busy}} = P_m = \frac{\lambda^m \mu^{m-m}}{\mu^m + \lambda \mu^{m-1} + \dots + \lambda^m} = \frac{\lambda^m}{\mu^m + \lambda \mu^{m-1} + \dots + \lambda^m}$$

Exercício 2

Considere uma sala de ginástica de um hotel com os seguintes equipamentos: 1 esteira, 2 bicicletas ergométricas e 1 elíptico. Depois de fazer exercícios na esteira, um hóspede vai para uma bicicleta com probabilidade 0.3 e para o elíptico com probabilidade 0.7. Depois de usar uma bicicleta, um hóspede sempre vai para o elíptico e depois de usar o elíptico, ele sempre retorna à esteira. Assim que alguém começa a se exercitar em um aparelho, ele/a permanece usando o aparelho por, em média, 3 minutos. Há sempre exatamente dois hóspedes na sala de ginástica. Uma vez na sala de ginástica, um hóspede típico utiliza o elíptico 3 vezes (i.e., visitas). Se um hóspede vai para um equipamento e ele não pode começar a usá-lo imediatamente, ele pacientemente espera a sua vez.

Desenhe um modelo de Markov para este "sistema".

Quais são as probabilidades estacionárias de cada estado?

Quantas vezes em média um hóspede típico utiliza a esteira?

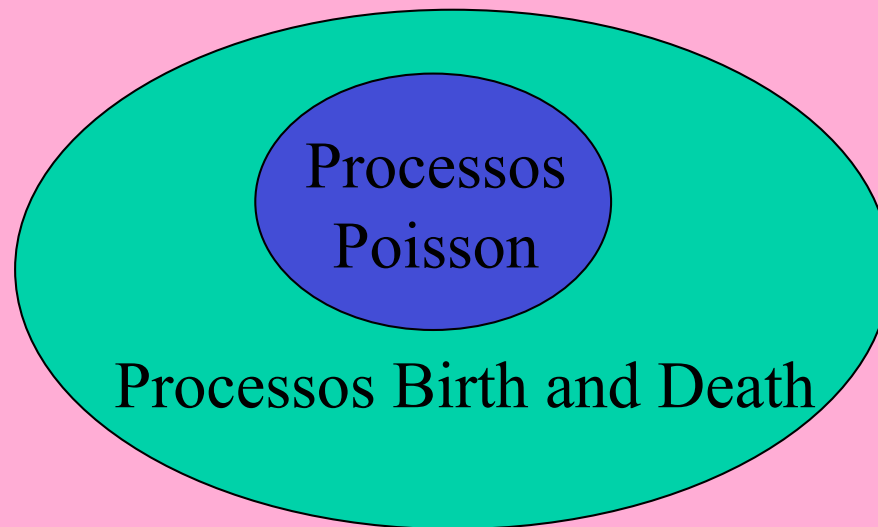
Qual a porcentagem de tempo em que cada equipamento permanece ocupado?

Quantos hóspedes deixam a sala de ginástica do hotel por hora?

Quanto tempo em média um hóspede permanece na sala de ginástica?

Modelos Markovianos

Processos de Markov

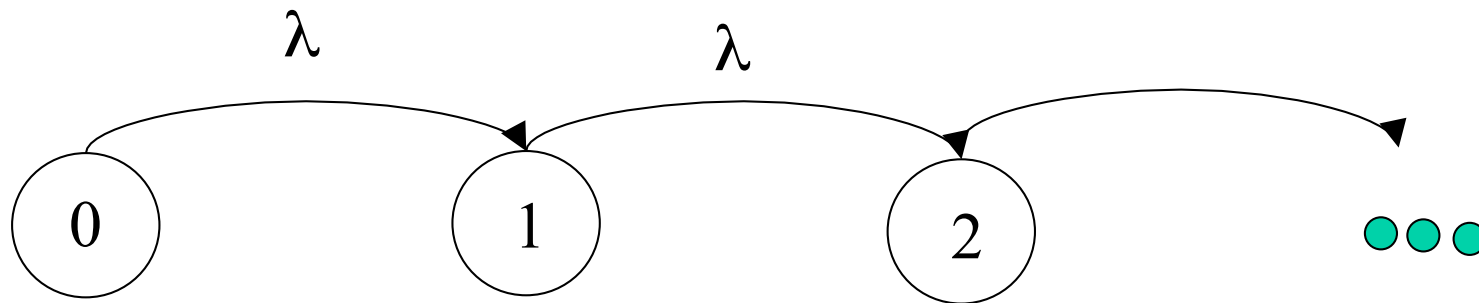


Processo Poisson

- Processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$:
 - $N(0) = 0$
 - $N(t) \geq 0$
 - $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$
 - $N(t) - N(s) = \# \text{ eventos ocorridos no intervalo } (s, t]$

Processo Poisson

- Um processo de contagem é um processo Poisson com taxa $\lambda > 0$ se:
 - O processo tem incrementos independentes: eventos ocorrendo em intervalos de tempo disjuntos são independentes
 - Os incrementos do processo são estacionários: a distribuição do número de eventos em qualquer intervalo de tempo depende somente da duração do intervalo e não de quando ele começa



Processo Poisson

- Teorema 1: Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo Poisson com taxa $\lambda > 0$. Então a V.A. Y que descreve o # de eventos em um intervalo de tempo de duração $t > 0$ tem distribuição Poisson com parâmetro λt

$$P(Y = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Logo o # médio de eventos que ocorre no intervalo de duração t é λt

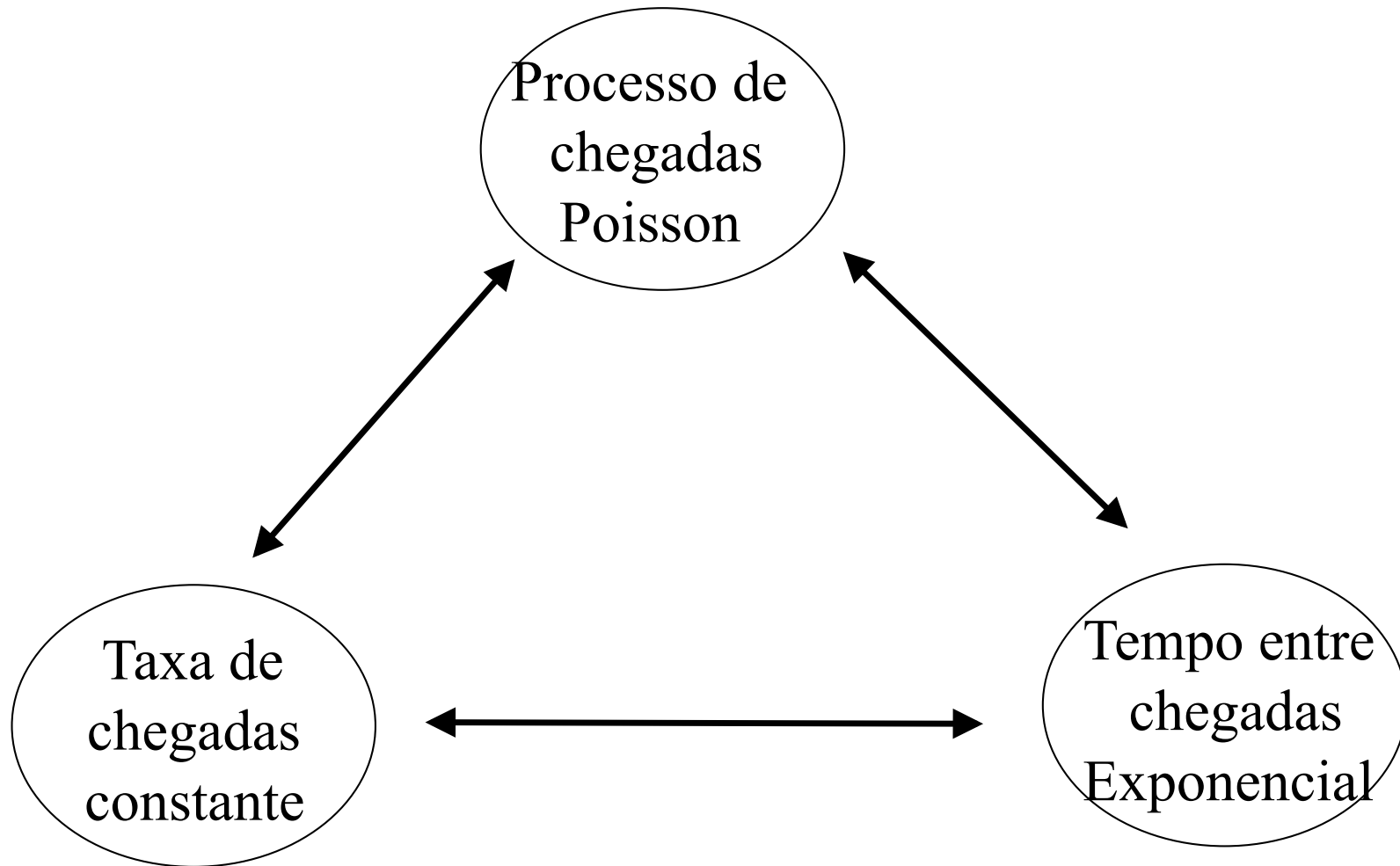
Processo Poisson

- Teorema 2: Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo Poisson com taxa $\lambda > 0$.
Sejam $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ os momentos de ocorrência de eventos.
Sejam os tempos entre chegadas $\{\tau_n\}$ definidos como $\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots$
Então os tempos entre chegadas $\{\tau_n\}$ são mutuamente independentes e identicamente distribuídos, cada um seguindo uma distribuição exponencial com média $1/\lambda$

Processo Poisson

- Teorema 3: Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de contagem tal que os tempos entre chegadas de eventos $\{\tau_n\}$ são independentes, identicamente distribuídos e seguem distribuição exponencial, cada um com valor médio $1/\lambda$. Então $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo Poisson com taxa $\lambda > 0$

Processo Poisson



Processo Poisson

- Teorema 3: Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo Poisson e suponha que um evento tenha ocorrido no intervalo de 0 a t .

Então, Y , a V.A. que descreve o momento em que o evento Poisson ocorreu, tem uma distribuição uniforme contínua no intervalo 0 a t .

Isto é, se $0 < \delta < t$, qualquer subintervalo de $(0, t]$ de tamanho δ tem probabilidade δ/t de conter o momento em que o evento ocorreu.

Processo Poisson

- Prova:

$$P(Y \leq x) = P(\tau_1 \leq x | N(t) = 1)$$

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \leq x | N(t) = 1) &= \frac{P[N(x) = 1 \text{ e } (N(t) - N(x) = 0)]}{P[N(t) = 1]} \\ &= \frac{P[N(x) = 1]P[(N(t - x) = 0)]}{P[N(t) = 1]} \\ &= \frac{\lambda x e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- Até agora vimos que para solucionar um modelo de Markov (determinar probabilidades em estado estacionário), bastava solucionar conjunto de equações de equilíbrio linear.
- Agora, vamos chegar às mesmas equações partindo de outra interpretação.

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- Definição: Uma sequência de V.As. $X_1, X_2, \dots$, formam uma cadeia de Markov com tempo discreto se para todo $n \in \{1, 2, \dots\}$ e todos os possíveis valores das V.As. tem-se que (para $i_1 < i_2 < i_3 \dots < i_n$) que:

$$P[X_n = j \mid X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$$

- $P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$: probabilidade de transição em um passo.
- Cadeia de Markov homogênea: probabilidades de transição independem de n : p_{ij}
- Matriz de probabilidades $P = [p_{ij}]$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

- Probabilidade de transição em m passos:

$$p_{i,j}^{(m)} = P[X_{n+m} = j \mid X_n = i]$$

$$p_{i,j}^{(m)} = \sum_k p_{i,k}^{(m-1)} p_{ki} \quad m = 2, 3, \dots$$

- Probabilidade de encontrar sistema em estado j no n-ésimo passo (comportamento transiente)

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$$

$$\pi^{(n)} = [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

- Probabilidade de encontrar sistema em estado j no n -ésimo passo

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$$

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} P = \left[\pi^{(0)} P \right] P = \pi^{(0)} P^2$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P = \pi^{(0)} P^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

- Probabilidade limite no estado estacionário

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$$

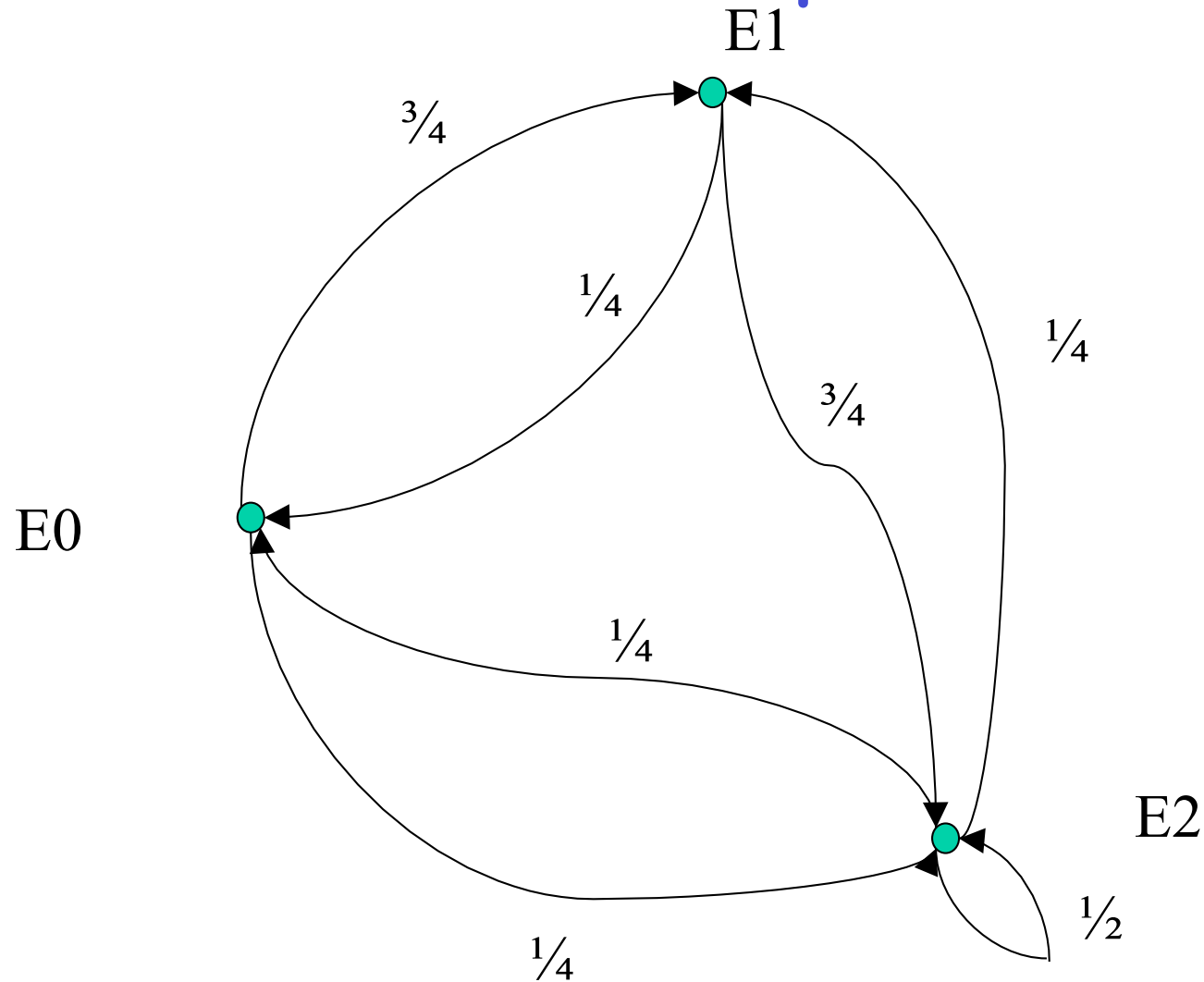
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n-1)} P$$

$$\pi = \pi \times P$$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i \times p_{i,j}$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Modelos de Markov: Exemplo



Modelos de Markov: Exemplo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \pi \times P$$

$$[\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2] = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2] \times \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_0 + 0\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$$

Mesmo conjunto de equações

$$\pi_0 = 1/5 = 0.2$$

$$\pi_1 = 7/25 = 0.28$$

$$\pi_2 = 13/25 = 0.52$$

Modelos de Markov: Exemplo

$$\pi^{(0)} = [1, 0, 0]$$

n	0	1	2	3	4	...	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203		0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254		0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543		0.52

Modelos de Markov: Exemplo

$$\pi^{(0)} = [0, 1, 0]$$

n	0	1	2	3	4	...	∞
$\pi_0^{(n)}$	0	0.25	0.187	0.203	0.199		0.20
$\pi_1^{(n)}$	1	0	0.375	0.250	0.289		0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.75	0.438	0.547	0.512		0.52

$$\pi^{(0)} = [0, 0, 1]$$

n	0	1	2	3	4	...	∞
$\pi_0^{(n)}$	0	0.25	0.187	0.203	0.199		0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.25	0.313	0.266	0.285		0.28
$\pi_2^{(n)}$	1	0.50	0.500	0.531	0.516		0.52

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- A mesma derivação se estende para cadeias de Markov não homogêneas: probabilidades de transição entre dois estados pode mudar com o tempo.

- Probabilidade de transição em um passo (matriz):

$$P(n) = [p_{i,j}(n, n + 1)]$$

- Probabilidades de transição em m passos (matriz):

$$H(m, n) = [p_{i,j}(m, n)]$$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

- Equações de Chapman-Komogorov

$$H(m, n) = H(m, q)H(q, n) \quad \text{ou}$$

$$p_{i,j}(m, n) = \sum_k p_{i,k}(m, q) p_{k,j}(q, n)$$

- Solução: expressar $H(m, n)$ em termos das matrizes de probabilidades $P(n)$ (entrada)

$$H(m, n) = H(m, n-1)P(n-1) \quad (\text{forward}) \quad \text{ou}$$

$$H(m, n) = P(m)H(m+1, n) \quad (\text{backward})$$

$$H(m, n) = P(m)P(m+1) \dots P(n-1) \quad m \leq n-1$$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

- Podemos determinar as probabilidades de estar em cada estado em determinado instante (probabilidades dependem do tempo)

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)} P(n) = \pi^{(0)} P(0)P(1)P(2)P(3)...P(n)$$

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- Uma derivação semelhante é feita para o caso do cadeias de Markov com tempo contínuo.
- Definição: Um processo aleatório $X(t)$ forma uma cadeia de Markov de tempo contínuo, se para todos os inteiros n , e para qualquer sequência $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, tal que $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$, tem-se:

$$\frac{P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n]}{P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i_n]}$$

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- Probabilidades de transição $p_{i,j}(s,t)$

$$p_{i,j}(s,t) = P(X(t)=j \mid X(s)=i) \quad t \geq s$$

- Equações de Chapman-Kolmogorov

$$p_{i,j}(s,t) = \sum_k p_{i,k}(s,u) p_{k,j}(u,t)$$

$$\text{matriz : } H(s,t) = [p_{i,j}(s,t)] \rightarrow H(s,t) = H(s,u)H(u,t) \quad s \leq u \leq t$$

- No caso de Cadeias de Markov com tempo contínuo, as probabilidades de transição de um passo são substituídas pelas taxas infinitesimais, calculadas em função das derivadas de $p_{i,j}(s,t)$ quando $t \rightarrow s$

Modelos de Markov:

Uma Outra Solução Formal

- Equações de Chapman-Kolmogorov (forward)

$$P(t) = [p_{i,j}(t, t + \Delta t)]$$

$$H(s, t) = H(s, t - \Delta t)P(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} H(s, t) - H(s, t - \Delta t) &= H(s, t - \Delta t)P(\Delta t) - H(s, t - \Delta t) \\ &= H(s, t - \Delta t)[P(\Delta t) - I] \end{aligned}$$

$$\frac{H(s, t) - H(s, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{H(s, t - \Delta t)[P(\Delta t) - I]}{\Delta t}$$

$$\Delta t \rightarrow 0 : \frac{dH(s, t)}{dt} = H(s, t)Q(t) \quad s \leq t$$

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{\Delta t}$$

Matriz $Q(t)$: gerador infinitesimal da
matriz de transição $H(s, t)$
Ou matriz de taxa de transição

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{\Delta t}$$

$$q_{i,i}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} \quad q_{i,j}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad i \neq j$$

Taxas infinitesimais de transição entre estados

Interpretação:

$-q_{i,i}(t)$ = taxa com que sistema sai do estado i (quando ele está no estado i)

$q_{i,j}(t)$ = taxa com que sistema move do estado i para o estado j ,
dado que esta no estado i

Note que: $\sum_j p_{i,j}(s, t) = 1 \Rightarrow \sum_j q_{i,j}(t) = 0$

Modelos de Markov: Uma Outra Solução Formal

Se cadeia de Markov homogênea: taxas de transição
independem do tempo

$$H(t) = H(s, s + t) = [p_{i,j}(t)]$$

$$Q = Q(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = H(t)Q \Leftrightarrow \frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

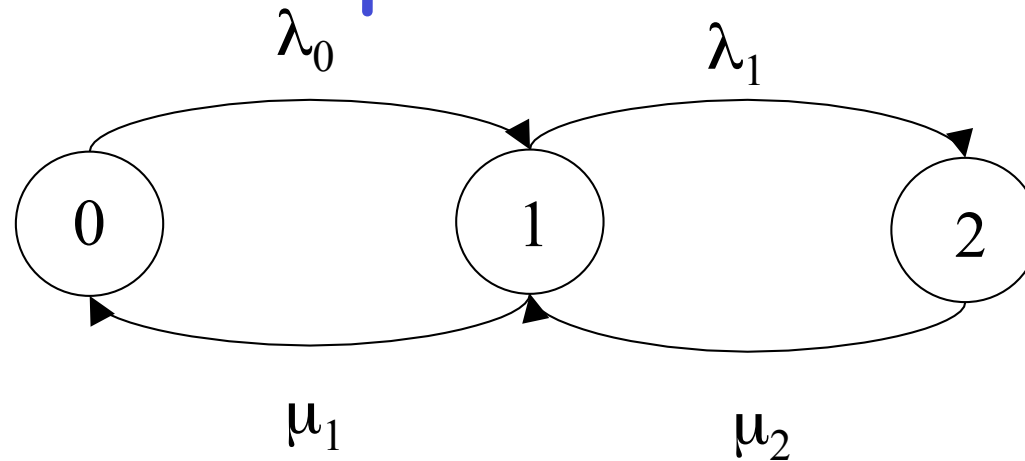
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \pi$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)Q = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\pi(t)}{dt}$$

$$\pi Q = 0$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

Modelos de Birth and Death: Exemplo



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \rightarrow \sum_j q_{i,j} = 0$$

Modelos de Birth and Death: Exemplo

$$\pi \times Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda_0 \times \pi_0 + \mu_1 \times \pi_1 = 0$$

$$\lambda_0 \times \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \times \pi_1 + \mu_2 \times \pi_2 = 0$$

$$\lambda_1 \times \pi_1 - \mu_2 \times \pi_2 = 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0$$

Mesmas equações
obtidas fazendo

Fluxo entrando = fluxo saindo