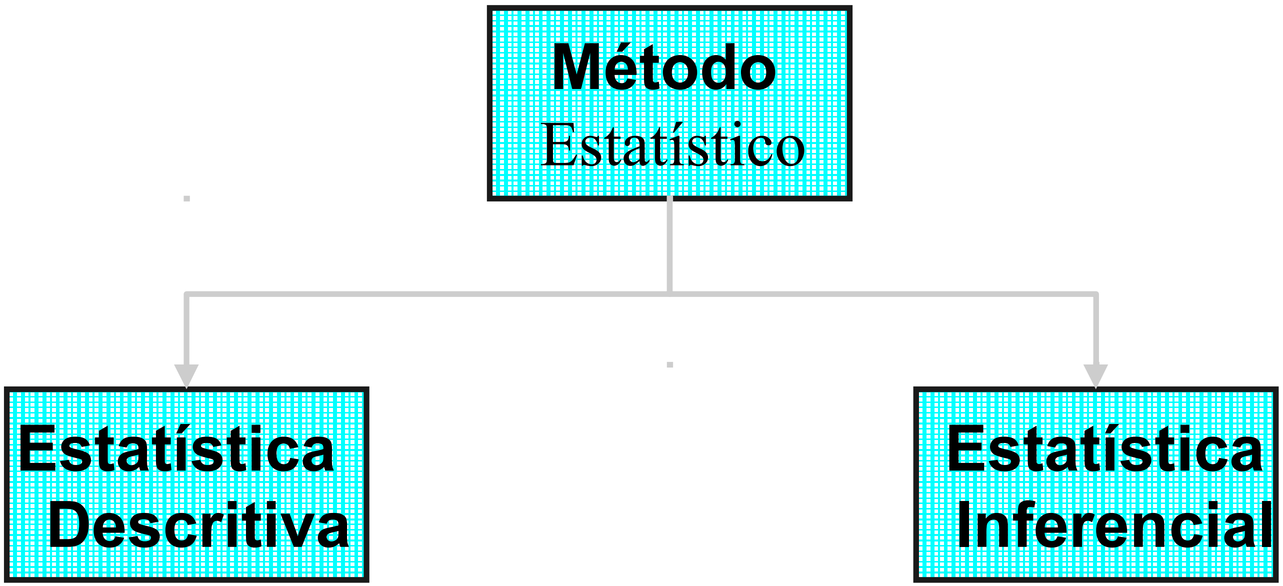
Métodos Quantitativos para Ciência da Computação Experimental

Jussara Almeida
DCC-UFMG
2016

Revisão de Probabilidade e Estatística

- Concentrado em estatística aplicada
- Estatística apropriada para medições
- A aula vai focar em temas que ja devem ser familiares a voces.

Métodos Estatísticos



Estatística Descritiva

- Envolve
  - Coletar dados
  - Apresentar dados
  - Caracterizar dados
- Finalidade
  - Descrever dados

Terminologia Básica

Experimento: um processo cujo resultado não é determinado com certeza

Espaço Amostral: S = {todos possíveis resultados de um experimento}

Ponto da amostra: um resultado (um membro do espaço amostral S)

Exemplo: uma moeda não viciada, $S = \{H,T\}$, onde H and T são resultados

Variável aleatória: uma função que atribui um número real a cada ponto do espaço amostral S.

Exemplo: $X = 1$ se $x=H$
$X = 0$ se $x=T$

Estatística Inferencial

- Envolve
  - Estimativas
  - Teste de hipótese
- Finalidade
  - Tomar decisões sobre características da população de uma coleta.

Terminologia Básica

Experimento: um processo cujo resultado não é determinado com certeza

Espaço Amostral: *S* = {todos possíveis resultados de um experimento}

Ponto da amostra: um resultado (um membro do espaço amostral *S*)

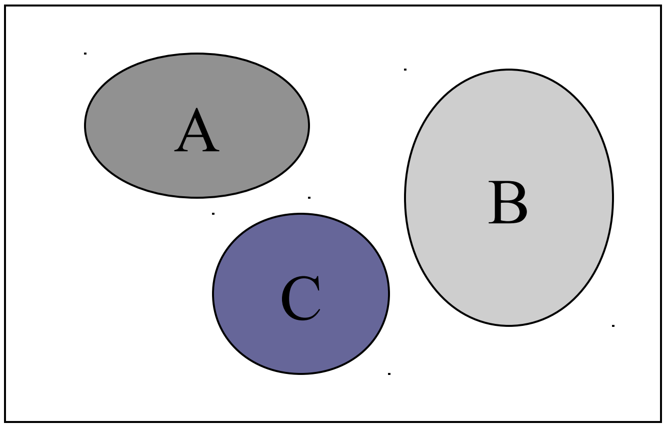
Exemplo: uma moeda não viciada, *S* = {H,T}, onde H and T são resultados

Variável aleatória: uma função que atribui um número real a cada ponto do espaço amostral *S.*

Exemplo: X = 1 se x=H

X = 0 se x=T

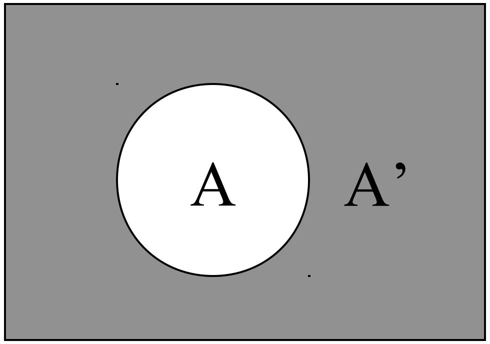
Algebra de Eventos



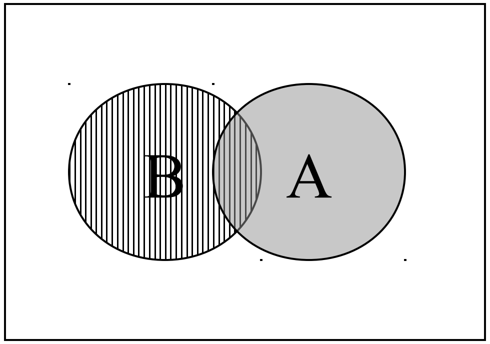
Eventos são coleções de pontos ou áreas em um espaço.

A coleção de todos os pontos num espaço inteiro é chamada de U, o conjunto universal.

Algebra de Eventos

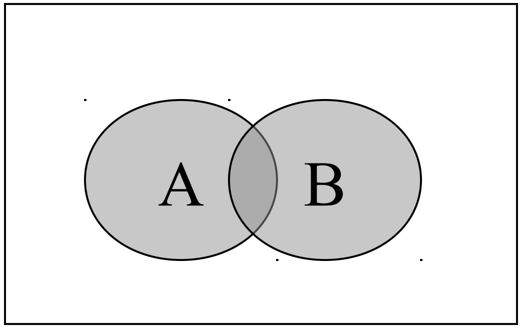


Evento A’, o *complemento* do evento A, é a coleção de todos os pontos no conjunto universal que não estão incluídos em A.



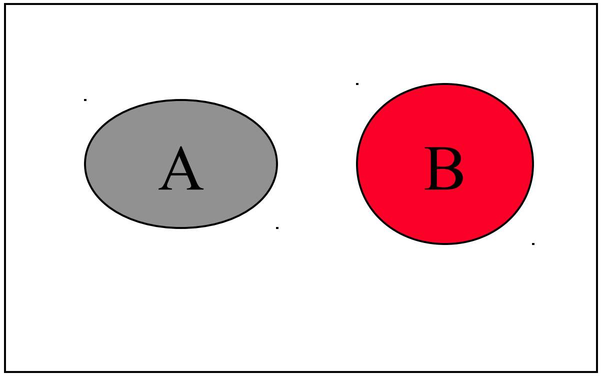
A intersecção de dois eventos A e B é a coleção de todos os pontos que estão contidos em ambos A e B, denotados por $A \cap B$ ou AB

Algebra de Eventos

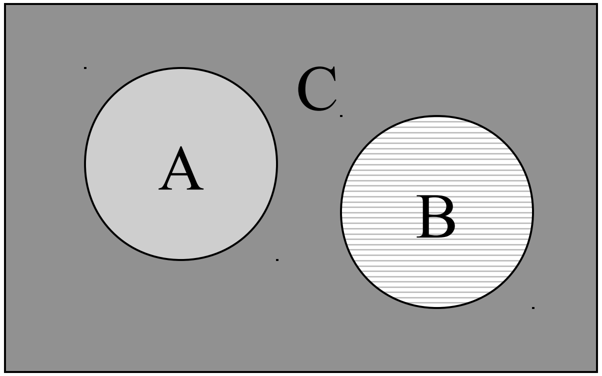


A *união* de dois eventos A e B é a coleção de todos pontos que estão em A ou em B ou em ambos.

Mutuamente Exclusivos e Coletivamente Exaustivo



Conjuntos de eventos são mutuamente exclusivos se todos conjuntos dos eventos não tem interseção



Conjuntos de eventos coletivamente exaustivos somam U

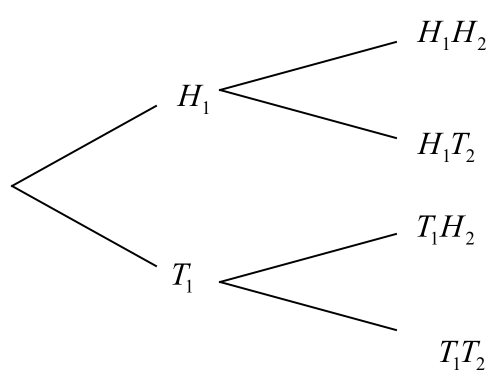
$$A + B + C = U$$

Espaços Amostrais

Espaço amostral: um conjunto mutuamente exclusivo e coletivamente exaustivo listando todos possíveis resultados de um experimento ou modelo.

Espaço Amostral

Evento $\begin{Bmatrix} H_n \\ T_n \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} Heads \\ Tails \end{Bmatrix}$ na n-ésima jogada de uma moeda.



H_1H_2 é o evento de grão fino para duas jogadas

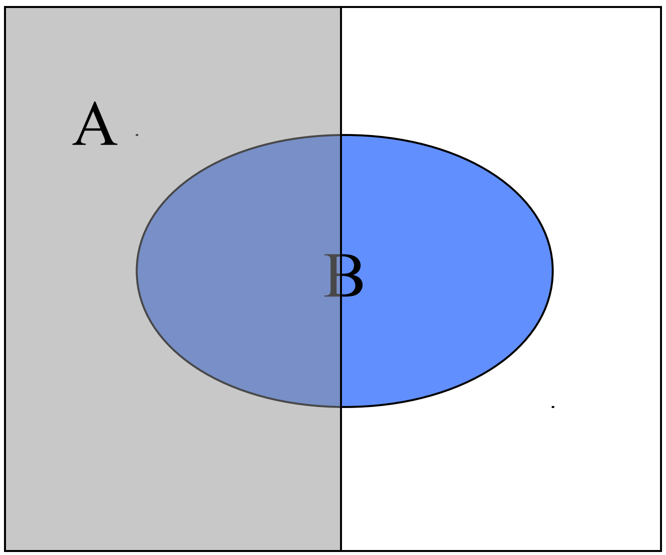
H_1 é o evento de grão grosso para duas jogadas

Três Axiomas da Medida de Probabilidade

- Para qualquer evento A, $P(A) \geq 0$
- $P(U) = 1$ (Normalização)
- Se $AB = \phi$, então $P(A+B) = P(A) + P(B)$

A partir desses axiomas pode-se determinar a medida de probabilidade de um evento E simplesmente somando todas as medidas dos eventos de grão mais fino que formam E.

Probabilidade condicional: visão intuitiva



$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Probabilidades

- Técnicas de contagem
- Permutações
- Combinações
- **Probabilidade**
- **Expectância matemática**

Probabilidade

Se existem **n** igualmente prováveis resultados (eventos) e **s** são favoráveis ("sucesso") então a probabilidade de um sucesso é : $\frac{s}{n}$

Exemplo: a probabilidade de obter "cara" para uma jogada da moeda é: **n = 2, s = 1**

então **P (``cara'') = 1/2**

P (``coroa'') = 1/2

Obs: P ("cara") + P("coroa") = 1/2 + 1/2 = 1

Exemplos

Determine a probabilidade de que 2 cartas retiradas de um baralho de 52 cartas sejam ambas pretas.

Exemplos

Determine a probabilidade de que 2 cartas retiradas de um baralho de 52 cartas sejam ambas pretas.

O número total de possibilidades : $\mathbf{n} = \binom{52}{2} = \dfrac{52 \cdot 51}{2} = 1326$

Número total de possibilidades favoráveis (“sucessos”):

$$\mathbf{s} = \binom{26}{2} = \frac{26 \cdot 25}{2} = 325$$

Probabilidade é: $\mathbf{P = s/n = 325 / 1326 = 0.245}$

Exercícios em Aula

1. Se um número decimal de até três digitos é escolhido aleatoriamente, determine a probabilidade que exatamente k dígitos são ≥ 7, para $0 \leq k \leq 3$

2. Considere uma caixa com 15 chips VLSI, sendo 5 deles defeituosos. Se uma amostra aleatória de 3 chips é retirada da caixa, qual a probabilidade de todos os três terem defeitos?

Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de *n* jobs chega a um multiprocessador com *n* processadores.

Quantos vetores de atribuicao :
(processador para job 1, …, processador para job *n*)
são possíveis?

Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de *n* jobs chega a um multiprocessador com *n* processadores.

  Assuma que cada um dos n^n possiveis vetores de atribuicao (i.e., processador para job 1, …, processador para job *n*) são igualmente provaveis.

  Encontre a probabilidade de que exatamente um processador nao seja assinalado a nenhum job. Para efeitos de exemplo, considere *n* = 3 e calcule, mas mostre a forma geral para *n*.

Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de *n* jobs chega a um multiprocessador com *n* processadores.

  Assuma que cada um dos n^n possiveis vetores de atribuicao (i.e., processador para job 1, …, processador para job *n*) são igualmente provaveis.

  Encontre a probabilidade de que exatamente um processador nao seja assinalado a nenhum job. Para efeitos de exemplo, considere *n* = 3 e calcule, mas mostre a forma geral para *n*.

Solucao: Espaco amostral (S), onde i_j representa o processador para o qual o job j e assinalado. Vamos chamar a solucao de ***P (evento processador ocioso)***

$$S = \{ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid i_j \in \{1, 2, \ldots, n\} \}$$

$$|S| = n^n$$

Exercicio de Probabilidade

Primeiro, vamos calcular a probabilidade que somente o processador ‘1’ esteja ocioso, denominando este evento de **A1**

Seja B_j *= processador j tem 2 jobs,* $2 \leq j \leq n$

$B_j = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n\} \mid i_k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ e

existe $k_1 \neq k_2$ tal que $i_{k1} = i_{k2} = j$; e $i_{j1} \neq i_{j2}$, caso contrário

$$A_1 = \bigcup_{(j=2..n)} B_j$$

Exercicio de Probabilidade

$$P(B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$

$$P(A_1) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$P(evento) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n * P(A_1) = \frac{n-1}{2} * \frac{(n-1)!}{n^{(n-2)}}$$

$$\text{para n} = 3 \Rightarrow P(evento) = \frac{2}{3}$$

Eventos Independentes

- Ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro.
- Exemplos:
  - Jogar moedas
  - “dados de entrada” de usuários separados
  - Acidentes de tráfego “não relacionados”

Probabilidade Condicional

- A probabilidade condicional do evento *A* dado que o evento *B* ocorreu, denotada por *P(A|B)*, e definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \, intersect \, B)}{P(B)}$$

Regra de Bayes e Teorema da Probabilidade Total

- *Prob. Total:* Sejam A_1, …, A_k uma particao do espaco S e B um evento qualquer de S, entao:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)*P(B|A_i)$$

- *Regra de Bayes:* Sejam os eventos A_1, …, A_k uma particao do espaco S tal que $P(A_j) > 0$,para todo j, e seja B um evento tal que $P(B) > 0$. Entao, para $i = 1,\dots, k$:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)}$$

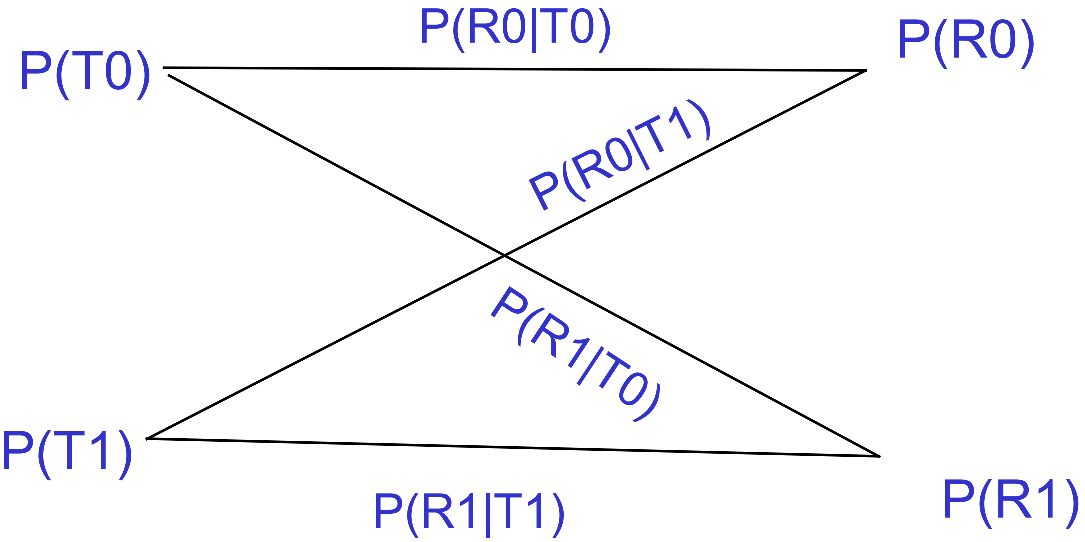
Exercicio

- Um canal de comunicação transporta dois tipos de sinais, denotados por 0 e 1. Devido ao ruido, um 0 transmitido e recebido como 1 e 1 como 0. Para um dado canal, assuma a probabilidade de 0.94 que um 0 transmitido seja corretamente recebido como 0 e a probabilidade de 0.91 que um 1 seja recebido como 1. Assuma tambem a probabilidade 0.45 de transmitir um 0. Determine:

  - Probabilidade que um 1 seja recebido
  - Probabilidade que um 0 seja recebido
  - Probabilidade que um 1 foi transmitido dado que um 1 foi recebido
  - Probabilidade que um 0 foi transmitido dado que um 0 foi recebido
  - Probabilidade de um erro

Solução

- Definição de eventos:
  - T0 = um 0 é transmitido
  - R0 = um 0 é recebido
  - $T_1 = \bar{T}_0$ um 1 é transmitido
  - $R_1 = \bar{R}_0$ um 1 é recebido



Perguntas

1. Probabilidade que um 1 é recebido
2. Probabilidade que um 0 é recebido
3. Probabilidade que um 1 foi transmitido dado que um 1 foi recebido
4. Probabilidade que um 0 foi transmitido dado que um 0 foi recebido
5. Probabilidade de um erro.

Sabe-se que:

$P(R0 \mid T0) = 0.94 \quad \Rightarrow \quad P(R1 \mid T0) = 1 - P(R0 \mid T0) = 0.06$

$P(R1 \mid T1) = 0.91 \quad \Rightarrow \quad P(R0 \mid T1) = 1 - P(R1 \mid T1) = 0.09$

$P(T0) = 0.45 \quad \Rightarrow \quad P(T1) = 1 - P(T0) = 0.55$

Solução

$$P(R1) = P(T0)P(R1|T0) + P(T1)P(R1|T1)$$

$$0.45*0.06 + 0.55*0.91 = 0.5275$$

$$P(R0) = P(\bar{R}1) = 1 - 0.5275 = 0.4725$$

$$P(T1|R1) = \frac{P(R1|T1)P(T1)}{P(T0)P(R1|T0) + P(T1)P(R1|T1)}$$

$$= \frac{P(R1|T1)P(T1)}{P(R1)} = \frac{0.55*0.91}{0.5275} = 0.9488$$

$$P(T0|R0) = \frac{P(R0|T0)P(T0)}{P(R0)} = \frac{0.94*0.45}{0.4725} = 0.8952$$

Solução

$$
\begin{aligned}
P(erro) &= P(T1 \cap R0) + P(T0 \cap R1) \\
&= P(T1 | R0)P(R0) + P(T0 | R1)P(R1) \\
&= (1 - P(T0 | R0))P(R0) + (1 - P(T1 | R1))P(R1) \\
&= (1 - 0.8952)0.4725 + (1 - 0.9488)0.5275 = .0765
\end{aligned}
$$