

# Exercício de Revisão 1

- Considere que seu trabalho é comparar o desempenho de dois algoritmos (A e B) de computação gráfica, que usam métodos diferentes para geração de faces humanas realistas.
- São sistemas complexos cuja execução leva tempos longos para geração das faces. O sistema A foi testado 8 vezes e o sistema B apenas 5, onde em cada experimento utilizou-se o mesmo padrão de resultado a obter.
- Os tempos de teste dos algoritmos estão na tabela a seguir. Com base nesses resultados, pede-se que se determine qual algoritmo teve melhor desempenho.

# Exercício de Revisao 1

<b>Experimento</b>	<b>Algoritmo A (seg)</b>	<b>Algoritmo B (seg)</b>
1	1011	894
2	998	963
3	1113	1098
4	1008	982
5	1100	1046
6	1039	-
7	1003	-
8	1098	-

# Exercício de Revisão 1

- Experimento não pareado: teste-t
- Quer saber qual algoritmo melhor : CI de 2 lados
- Algoritmo A:
  - Media: 1046.25
  - Desvio Padrão s: 49.25
  - $n_A = 8$
- Algoritmo B:
  - Media: 996.60
  - Desvio Padrão s: 78.4079
  - $n_B = 5$

# Exercício de Revisão 1

- Diferença das medias  $\bar{x}_a - \bar{x}_b = 49.65$

- Desvio padrao:

$$s = \sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}} = \sqrt{\frac{2425.64}{8} + \frac{6147.8}{5}} = 39.15$$

- Graus de liberdade:

$$v = \frac{\left( s_a^2/n_a + s_b^2/n_b \right)^2}{\frac{1}{n_a - 1} \left( \frac{s_a^2}{n_a} \right)^2 + \frac{1}{n_b - 1} \left( \frac{s_b^2}{n_b} \right)^2} - 2 = 4.007 \rightarrow 4$$

# Exercício de Revisao 1

- IC de 90% (usar VA t ja que graus de liberdade < 30)

$$\left(\bar{X}_a - \bar{X}_b\right) \pm t_{[1-\alpha/2;v]} S$$

$$49.65 \pm t_{[0.95;4]} * 39.15 = 49.65 \pm 2.132 * 39.15$$

$$(-33.82, 133.12)$$

- O intervalo contem 0. Logo nao podemos concluir que um sistema e melhor que o outro. Estatisticamente, com 90% de confianca, eles tem desempenho comparavel.

## Exercicios de Revisao 2

Considere que num conjunto de servidores de uma máquina de busca, um servidor tem a probabilidade de falhar no período noturno igual 0.25 (i.e., a probabilidade de qualquer servidor ter falhado ao amanhecer é 25%). Para dois servidores, desenhe os gráficos da pmf e CDF da variável aleatória  $X$ , onde  $P[X=x] = P[x \text{ servidores falharam}]$ . Determine a média, a variância e o coeficiente de variacao de  $X$ . Assuma que as falhas são independentes e identicamente distribuídas.

Repita o processo para  $n$  servidores

# Exercicios de Revisao 2

- Distribuicao binomial com parametros
  - $n = \#$  servidores
  - $p=0.25$  = prob. de 1 servidor falhar.
- Para  $n=2$ , e possivel resolver a mao:
  - $P[X=0] = (1-0.25)*(1-0.25) = 0.5625$
  - $P[X=1] = (1-0.25)*0.25 + 0.25*(1-0.25) = 0.375$
  - $P[X=2] = 0.25*0.25 = 0.0625$
  
  - Media:  $0*0.5625 + 1*0.375 + 2*0.0625 = 0.50$
  - Variancia:  $\sum x^2 P(X=x) - \bar{X}^2$ 
    - $0^2*0.5625 + 1^2*0.375 + 2^2*0.0625 - 0.5^2=0.375$
  - CV = Stddev/Media =  $\text{sqrt}(0.375)/0.5 = 1.22$
  - Para  $n$  servidores, usar formula da binomial

## Exercicios de Revisao 3

Considere um “switch” de  $N$  portas de entrada e  $N$  portas de saída ( $N \times N$ ). O sistema opera com o tempo dividido em intervalos (“time slots”). Um pacote chega em qualquer “time slot” numa porta de entrada com probabilidade  $p$ , independente de outros “time slots” e das outras portas de entrada. Assuma uma probabilidade de roteamento uniforme (i.e., um pacote que chegou em uma dada porta de entrada vai para qualquer porta de saída com probabilidade igual – igualmente provavel). Qual é a probabilidade de exatamente  $n$  ( $n < N$ ) pacotes irem para uma mesma porta de saída qualquer num “time slot”.



## Exercicios de Revisao 3

- Quando um pacote chega em uma porta de entrada (com prob  $p$ ), ele vai para qualquer porta com probabilidade  $1/N$ . Isto pode ser visto como um processo de Bernoulli com prob.  $p/N$  de sucesso.
- Uma vez que ha  $N$  portas de entradas, o numero  $n$  de pacotes indo para qualquer porta de saida e a soma de  $N$  processos de Bernoulli
  - Isto significa uma VA Binomial  $X$  com  $N$  tentativas e prob. de sucesso  $p/N$

$$P(X=n) = \binom{N}{n} \left(\frac{p}{N}\right)^n \left(1 - \frac{p}{N}\right)^{(N-n)} \quad n = 0, 1, \dots, N$$

## Exercicios de Revisao 4

Considere um sistema constituido de  $n$  tarefas sequenciais. Cada tarefa  $X_i$  ( $i=1..n$ ) executa em um tempo exponencial com media de  $10^i$  segundos.

Se o sistema termina execucao somente quando todas as tarefas terminarem, qual a media e o desvio padrao do tempo de execucao do sistema?

Se o sistema for revisado de tal maneira que as tarefas executem em paralelo, qual a probabilidade do sistema executar por mais de  $z$  minutos? Calcule a probabilidade para  $z=1$  minuto e  $n = 3$ ?

Dica:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

# Exercicios de Revisao 4

- Sistema sequencial:
- $Z$  = tempo de execucao

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i$$

*Media / Esperanca :*

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad E(X_i) = 10 * i$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n 10 i = 10 \sum_{i=1}^n i = 10 \frac{n(n+1)}{2} = 5n(n+1)$$

## Exercicios de Revisao 4

- Sistema sequencial:
- $Z$  = tempo de execucao

*Variancia:*

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n 1^2 \times \text{Var}(X_i)$$

$$\text{Var}(X_i) = (10 * i)^2 = 100 i^2$$

$$\text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^n 100 i^2 = 100 \sum_{i=1}^n i^2 = 100 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Stddev}(Z) = \sqrt{\text{Var}(Z)} = 4.08 \sqrt{n(n+1)(2n+1)}$$

## Exercicios de Revisao 4

- Sistema paralelo
- $Z = \text{tempo de execucao} = \max(X_i)$
- $\text{Prob}(Z > 60) = ?$  para  $n = 3$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 60) &= P(\max(X_i) \leq 60) \\ &= P(X_1 \leq 60 \cap X_2 \leq 60 \cap X_3 \leq 60) \\ &= P(X_1 \leq 60) P(X_2 \leq 60) P(X_3 \leq 60) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{1}{10} 60}\right) \left(1 - e^{-\frac{1}{20} 60}\right) \left(1 - e^{-\frac{1}{30} 60}\right) = \\ P(Z > 60) &= 1 - P(Z \leq 60) = \end{aligned}$$

# Exercicios de Revisao 5

O numero de operacoes de I/O realizadas por um conjunto de programas foi medido e obteve-se: {23, 33, 14, 15, 42, 28, 33, 45, 23, 34, 39, 21, 36, 23, 34}. Responda:

- a) Quais sao o 10<sup>th</sup> e o 90<sup>th</sup> percentis da amostra?
- b) Qual o numero medio de operacoes de I/O realizadas por um programa?
- c) Qual e o IC de 90% para este numero? Se voce assumir que o numero medio de operacoes de I/O realizadas pelos programas de mesma classe e igual a media da amostra, qual o maior erro que voce pode incorrer, assumindo uma confianca de 90%?
- d) Qual e a porcentagem de programas que fazem no maximo 35 operacoes de I/O? Voce pode dizer, com 90% de confianca, que menos que 80% dos programas realizam no maximo 35 operacoes de I/O? E menos que 90%?
- e) Suponha que o numero de operacoes medido corresponde ao numero de I/Os realizados por segundo por cada programa. Suponha ainda que o mix de programas acima deve executar (em paralelo) em um determinado sistema. O sistema A consegue suportar, em media, no maximo 450 operacoes de I/O por segundo. O sistema A ira suportar a execucao simultanea do mix de programas acima?

# Exercicios de Revisao 5

a) Quais sao o 10<sup>th</sup> e o 90<sup>th</sup> percentis da amostra?

14 , 15 , 21 , 23 , 23 , 23 , 28 , 33 , 33 , 34 , 34 , 36 , 39 , 42 , 45

10<sup>th</sup> percentil dado pelo  $[1 + (n-1)0.1] = [1+14*0.1] = 2\text{o elemento} = 15$

90<sup>th</sup> percentil dado pelo  $[1 + 14*0.9] = 14\text{o elemento} = 42$

b) Qual o numero medio de operacoes de I/O realizadas por um programa?

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 29.53$$

# Exercicios de Revisao 5

c) Qual e o IC de 90% para este numero?

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

IC de dois lados:  $1 - \alpha/2 = 0.95$

graus de liberdade :  $n - 1 = 14$

$$t_{1 - \alpha/2, 14} = t_{0.95, 14} = 1.761$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 9.43$$

$$29.53 \pm 1.761 \left( \frac{9.43}{\sqrt{15}} \right)$$
$$(25.2423, 33.8177)$$

Qual o maior erro que pode incorrer?

$$c_2 = (1 + e)\bar{x} \rightarrow 33.8177 = (1 + e)29.53$$

$$e = 33.8177 / 29.53 - 1 = 0.145$$

erro de 14.5% no maximo



# Exercicios de Revisao 5

d) Qual e a porcentagem de programas que fazem no maximo 35 operacoes de I/O?

$$p = 11/15 = 0.73$$

Voce pode dizer, com 90% de confianca, que menos que 80% dos programas realizam no maximo 35 operacoes de I/O?

CI de 90% de um lado so para a proporcao:

$$IC \rightarrow -\infty, p + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$-\infty, 0.73 + 1.282 \sqrt{\frac{0.73(0.27)}{15}} \quad (-\infty, 0.877)$$

Com 90% de confianca, nao posso dizer que menos que 80% dos programas realizam no maximo 35 operacoes. Posso dizer entretanto que menos que 90% dos programa realizam no max. 35 operacoes.

# Exercicios de Revisao 5

e) O sistema A consegue suportar, em media, no maximo 450 operacoes de I/O por segundo. O sistema A ira suportar a execucao simultanea do mix de programas acima?

Soma total de # I/O/s =  $C = (14 + 15 + \dots) = 443$

Preciso determinar IC para C:

O que e  $s_c$  ?  $C \pm t_{1-\alpha/2, n-1} s_C$  ou  $-\infty, C + t_{1-\alpha, n-1} s_C$

$$C = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$\text{Var}(C) = 1^2 \text{Var}(X_1) + 1^2 \text{Var}(X_2) + \dots + 1^2 \text{Var}(X_n)$$

Assumindo todas as VAs sao iid :  $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \dots = \text{Var}(X_n)$

$$\text{Var}(C) = n \text{Var}(X) \quad s_C = s \sqrt{n} = 9.43 \sqrt{15} = 36.52$$

# Exercicios de Revisao 5

CI de 90% de um lado so para C:

$$-\infty, C + t_{1-\alpha, n-1} S_C$$

$$-\infty, 443 + 1.345 \times 36.52$$

$$(-\infty, 492.12)$$

Nao posso dizer que o sistema A aguentaria a carga com 90% de confianca uma vez que o intervalo de confianca inclui o 450