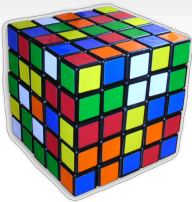


Eliminação de Gauss



Loïc Cerf

1 de setembro de 2022

UFMG – ICEX – DCC





Exercício A

Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial, usando 4 casas decimais:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = -20 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33 \end{cases}.$$

Calcule o vetor resíduo e a norma-2 dele.



Exercício A

O sistema na forma matricial:

$$Ax = b \text{ com } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix}.$$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1		-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1		-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$\frac{-1}{5}$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$			$-(-0,2)L_2 + L_1$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$		$-(-0,2)L_2 + L_1$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3		2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$\frac{2}{5}$	2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2			$-0,4L_2 + L_3$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	$4,2$	3,6		$-0,4L_2 + L_3$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	$4,2$	$3,6$	24,6	$-0,4L_2 + L_3$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4		0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2	$3,6$	$24,6$	$-0,4L_2 + L_3$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4	$\frac{1,4}{4,2}$	0	1,4	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2	$3,6$	$24,6$	$-0,4L_2 + L_3$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4	$0,3333$	0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2	3,6	$24,6$	$-0,4L_2 + L_3$
L_6		0	0	$-2,9999$		$-0,3333L_5 + L_4$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4	$0,3333$	0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2	$3,6$	$24,6$	$-0,4L_2 + L_3$
L_6		0	0	$-2,9999$	$-23,9992$	$-0,3333L_5 + L_4$



Exercício A

	m	A			b	operações
L_1	$-0,2$	-1	1	-2	-20	
L_2		5	2	1	21	
L_3	$0,4$	2	5	4	33	
L_4	$0,3333$	0	$1,4$	$-1,8$	$-15,8$	$-(-0,2)L_2 + L_1$
L_5		0	4,2	3,6	24,6	$-0,4L_2 + L_3$
L_6		0	0	-2,9999	-23,9992	$-0,3333L_5 + L_4$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = \frac{-23,9992}{-2,9999}$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \textcolor{red}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = \textcolor{red}{8}$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = 8$$

$$x_2 = \frac{24,6 - 3,6 \times 8}{4,2}$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = 8$$

$$x_2 = -1$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = 8$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = \frac{21 - 2 \times (-1) - 1 \times 8}{5}$$



Exercício A

$$Ax = b \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4,2 & 3,6 \\ 0 & 0 & -2,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{3} \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 24,6 \\ -23,9992 \end{bmatrix}.$$

Soluções do sistema triangular superior obtidas pelas substituições retroativas:

$$x_3 = 8$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = \textcolor{red}{3}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \end{bmatrix}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 21 \end{bmatrix}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Exercício A

Resultado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O vetor resíduo é:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A norma-2 do vetor resíduo é $\sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$.



Exercício B

Exercício para entregar

Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial, usando 2 casas decimais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} .$$

Formulário

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$



Exercício C

Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial, usando 3 casas decimais:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Formulário

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$



Exercício D

Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial (em caso de igualdade, escolha o primeiro valor igual), usando 3 casas decimais:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 = -8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -4 \end{cases}$$



License

©2013–2022 Loïc Cerf



These slides are licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.