

Polinômios Interpoladores

Loïc Cerf

1 Polinômio de Newton

Em toda esta seção:

1. $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots (x_n; y_n)$ são pontos em $\mathbb{R}^2$ e com abscissas distintas, ou seja: $\forall i \in \{0; \dots; n\}, \forall j \in \{0; \dots; n\} \setminus \{i\}, x_i \neq x_j$;
2. i é um inteiro qualquer maior ou igual a 0 e menor ou igual a n ;
3. k é um inteiro qualquer maior ou igual a 0 e menor ou igual a $n - i$;
4. $P_{i..i+k}$ é o polinômio (único, dado 1.) de grau k ou menor que interpola $(x_i; y_i), \dots, (x_{i+k}; y_{i+k})$, ou seja, $\forall j \in \{i; \dots; i+k\}, P_{i..i+k}(x_j) = y_j$.

Teorema 1.

$$P_{i..i+k}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1..i+k}(x) - (x - x_{i+k})P_{i..i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$$

Demonstração 1. Por definição, $P_{i..i+k}$ é um polinômio de grau k ou menor e ambos $P_{i+1..i+k}$ e $P_{i..i+k-1}$ são polinômios de grau $k-1$ ou menor. Logo, de cada lado da igualdade que queremos demonstrar, temos um polinômio de grau k ou menor. São iguais se e somente se coincidem em $k+1$ pontos de abscissas distintas, pois um único polinômio de grau k ou menor passa por $k+1$ pontos de abscissas distintas. Usamos $(x_i; y_i), (x_{i+1}; y_{i+1}), \dots (x_{i+k}; y_{i+k})$.

Em x_i :

- $P_{i..i+k}(x_i) = y_i$;
- $\frac{0 - (x_i - x_{i+k})P_{i..i+k-1}(x_i)}{x_{i+k} - x_i} = y_i$, porque $P_{i..i+k-1}(x_i) = y_i$.

Em x_{i+k} :

- $P_{i..i+k}(x_{i+k}) = y_{i+k}$;
- $\frac{(x_{i+k} - x_i)P_{i+1..i+k}(x_{i+k}) - 0}{x_{i+k} - x_i} = y_{i+k}$, porque $P_{i+1..i+k}(x_{i+k}) = y_{i+k}$.

$\forall j \in \{i+1; i+2; \dots; i+k-1\}$, em x_j :

- $P_{i..i+k}(x_j) = y_j$;
- $\frac{(x_j - x_i)P_{i+1..i+k}(x_j) - (x_j - x_k)P_{i..i+k-1}(x_j)}{x_{i+k} - x_i} = y_j$, porque $P_{i+1..i+k}(x_j) = P_{i..i+k-1}(x_j) = y_j$.

□

Seja $\Delta^k y_i \in \mathbb{R}$ o coeficiente que multiplica x^k em $P_{i..i+k}(x)$. Em outros termos, $\Delta^k y_i$ é definido como o coeficiente líder de $P_{i..i+k}$ se $P_{i..i+k}$ for de grau k ou como 0 se $P_{i..i+k}$ for de grau menor. Essa definição vale para quaisquer $i \in \{0; \dots; n\}$ e $k \in \{1; \dots; n-i\}$. Em particular, $\Delta^{k-1} y_{i+1}$ e $\Delta^{k-1} y_i$ são os coeficientes que multiplicam x^{k-1} em $P_{i+1..i+k}(x)$ e $P_{i..i+k-1}(x)$, respectivamente.

$P_{i..i}(x) = \Delta^0 y_i = y_i$ porque $P_{i..i}$ é o polinômio de grau 0 ou menor que interpola $(x_i; y_i)$. Igualando os coeficientes que multiplicam x^k dos dois lados da igualdade no Teorema 1, achamos também que $\Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}$.

Contudo, $\begin{cases} \Delta^0 y_i = y_i \\ \forall k \in \{1; \dots; n-i\}, \Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$ permite o cálculo

recursivo de $\Delta^k y_i$ para quaisquer $i \in \{0; \dots; n\}$ e $k \in \{0; \dots; n-i\}$.

A ideia do polinômio de Newton é de expressar $P_{0..n}$ como $P_{0..n-1} + Q$. Como $P_{0..n}$ é um polinômio de grau n ou menor e $P_{0..n-1}$ é um polinômio de grau $n-1$ ou menor, Q é um polinômio de grau n ou menor (1) e o coeficiente de Q que multiplica x^n é o mesmo de $P_{0..n}$, ou seja, $\Delta^n y_0$ (2). Por definição de $P_{0..n}$ e $P_{0..n-1}$, $\forall i \in \{0; \dots; n-1\}$, $P_{0..n}(x_i) = y_i = P_{0..n-1}(x_i) + 0$, ou seja, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ são raízes de Q (3). Por (1), (2) e (3), $Q(x) = \Delta^n y_0 \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$.

Logo, $P_{0..n}(x) = P_{0..n-1}(x) + \Delta^n y_0 \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$.

Com o mesmo raciocínio, $P_{0..n-1}(x) = P_{0..n-2}(x) + \Delta^{n-1} y_0 \prod_{j=0}^{n-2} (x - x_j)$ e

$P_{0..n}(x) = P_{0..n-2}(x) + \Delta^{n-1} y_0 \prod_{j=0}^{n-2} (x - x_j) + \Delta^n y_0 \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$. Continuamos

assim até expressar $P_{0..1}(x)$ como $P_{0..0}(x) + \Delta^1 y_0 (x - x_0) = y_0 + \Delta^1 y_0 (x - x_0)$ já que, por definição, $P_{0..0}$ é o polinômio de grau 0 ou menor que interpola $(x_0; y_0)$. Contudo, obtemos o polinômio de Newton:

$$P_{0..n}(x) = \sum_{i=0}^n \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) .$$

2 Polinômio de Lagrange

A interpolação por Lagrange, empregando o dispositivo prático, é:

Algoritmo 1 POLINÔMIO-LAGRANGE

Entrada: $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}$

Saída: $P_{m-1}(z)$

soma $\leftarrow 0$

Gd $\leftarrow 1$

para $i = 1 \rightarrow m$ **faça**

 Gi $\leftarrow z - x[i]$

se Gi = 0 **então**

retorne $y[i]$

fim se

 Gd $\leftarrow$ Gd $\times$ Gi

para $j = 1 \rightarrow i - 1$ **faça**

 Gi $\leftarrow$ Gi $\times (x[i] - x[j])$

fim para

para $j = i + 1 \rightarrow m$ **faça**

 Gi $\leftarrow$ Gi $\times (x[i] - x[j])$

fim para

 soma $\leftarrow$ soma + $y[i] / \text{Gi}$

fim para

retorne Gd $\times$ soma

Graças à fatoração de Gd, o número de operações na aritmética de ponto flutuante é menor que empregando o pseudocódigo apresentado na maioria dos livros sobre cálculo numérico, inclusive em *Algoritmos Numéricos* até a terceira edição. Notando n o grau da interpolação, são:

Adições: $(n+1)(1+n+1) = n^2 + 3n + 2$

Multiplicações: $(n+1)(1+n) + 1 = n^2 + 2n + 2$

Divisões: $n + 1$

Contando somente as operações na aritmética de ponto flutuante (bem mais demoradas que aquelas na aritmética inteira), a interpolação por Newton efetua:

Adições: $\frac{n(n+1)}{2} \times 2 + n \times 2 = n^2 + 3n$

Multiplicações: n

Divisões: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Então, qualquer que seja n , a interpolação por Newton continua requerendo menos operações na aritmética de ponto flutuante que a interpolação por Lagrange: 2 adições e $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3$ multiplicações/divisões a menos.

 Este documento está licenciado com uma Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.