UFMG/ICEx/DCC — Projeto e Análise de Algoritmos

Lista de Exercícios 1

Pós-Graduação em Ciência da Computação — 1º Semestre de 2011

Observações:

1. Comece a fazer esta lista imediatamente. Você nunca terá tanto tempo para resolvê-lo quanto agora!
2. **Data de Entrega**: até 2 de abril, **às 9:30 horas**, ou antes. Após essa data e hora haverá uma penalização por atraso: 2^d, onde d é o número de dias de atraso.
3. Envie qualquer material referente a esta lista de exercícios para o endereço eletrônico `esub.para.loureiro@gmail.com` tendo como assunto `[PAA 2011/1 LE1: "seu nome completo"]` e como anexo um arquivo zip, descrito abaixo, com o nome `LE1_"SeuNomeCompleto".zip` onde o string `"SeuNomeCompleto"` é o seu nome completo sem espaços em branco.

   Exemplo para o aluno Zoroastro Felizardo e Sortudo:

   - Assunto: `[PAA 2011/1 LE1: Zoroastro Felizardo e Sortudo]`
   - Arquivo zip: `LE1_ZoroastroFelizardoESortudo.zip`
4. O seu programa deve ser executado em alguma máquina do ambiente computacional do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, onde os monitores irão avaliá-lo. No arquivo `leiame.txt`, a ser incluído no arquivo zip, você deve dizer qual é o ambiente computacional para executar o seu TP bem como todas as instruções necessárias.
5. Linguagem de programação do trabalho: C, C++ ou Java.
6. As questões, a seguir, tratam do projeto de algoritmos. CLSR é a referência do exercício no livro-texto.
7. Das primeiras 18 questões, escolha oito para resolver e dos últimos cinco problemas escolha dois problemas para implementar.

Questão 1 **[CLSR, Ex 2.2-4, pg 27]**

Como podemos modificar quase que qualquer algoritmo para ter um bom tempo de execução para o melhor caso?

Questão 2 **[CLSR, Ex 2.3-4, pg 37]**

O algoritmo de Ordenação por Inserção pode ser expresso como um procedimento recursivo da seguinte forma: para ordenar $A[1..n]$, ordena-se recursivamente $A[1..n-1]$ e então insere-se $A[n]$ no vetor ordenado $A[1..n-1]$. Escreva uma equação de recorrência para o tempo de execução dessa versão recursiva, resolva essa equação e indique o crescimento da pilha de recursão.

Questão 3 **[CLSR, Ex 2.3-6, pg 37]**

Observe que o laço **while** das linhas 5–7 do procedimento Insertion-Sort (apresentado na seção 2.1 do livro CLSR, pg. 24 e mostrado abaixo) usa uma pesquisa linear para percorrer de trás para frente o vetor ordenado $A[1..j-1]$. Pode-se usar a pesquisa binária para melhorar o tempo de execução no pior caso do Insertion-Sort para $\Theta(n \log n)$?

INSERTION-SORT(A)

```
1  for j ← 2 to length[A]
2       do key ← A[j]
3          ▷ Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
4          i ← j − 1
5          while i > 0 and A[i] > key
6               do A[i + 1] ← A[i]
7                  i ← i − 1
8          A[i + 1] ← key
```

Questão 4 [CLSR, Ex 2.3-6, pg 37]

Descreva um algoritmo com complexidade de tempo $\Theta(n \log n)$ que, dado um conjunto S de n inteiros e um outro inteiro x, determina se existe ou não dois elementos de S cuja soma é exatamente x.

Questão 5 [CLSR, Problema 2-1, pg 37]

(*Ordenação por Inserção em pequenos vetores no Mergesort.*) Sabe-se que o algoritmo Mergesort executa no pior caso em tempo $\Theta(n \log n)$ e o algoritmo de Ordenação por Inserção no pior caso em tempo $\Theta(n^2)$. No entanto, os fatores constantes do Inserção o tornam mais rápido para um pequeno valor de n. Assim, faz sentido usar o algoritmo de Ordenação por Inserção quando os sub-problemas tornam-se suficientemente pequenos. Considere a seguinte modificação no Mergesort: $\frac{n}{k}$ sub-listas de comprimento k são ordenadas usando o algoritmo de Ordenação por Inserção e então combinadas (*merged*) usando o mecanismo do Mergesort, sendo k o valor a ser determinado.

(a) Mostre que as $\frac{n}{k}$ sub-listas, cada uma de comprimento k, podem ser ordenadas pelo algoritmo de Ordenação por Inserção no pior caso em tempo $\Theta(nk)$.

(b) Mostre que as sub-listas podem ser combinadas (*merged*) no pior caso em tempo $\Theta(n \log \frac{n}{k})$.

(c) Dado que o algoritmo modificado executa no pior caso em tempo $\Theta(nk + n \log \frac{n}{k})$, qual é o maior valor assintótico (usando notação Θ) de k como uma função de n para o qual o algoritmo modificado tem o mesmo tempo de execução assintótico do Mergesort padrão?

(d) Na prática, como o valor de k seria escolhido?

Questão 6 [CLSR, Problema 2-4, pg 39]

(*Inversões.*) Seja $[A \,..\, n]$ um vetor com n números distintos. Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$, então o par (i, j) é chamado uma inversão de A.

(a) Liste as cinco inversões do vetor $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$.

(b) Que vetor com elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem o maior número de inversões? Quantas inversões existem?

(c) Qual é a relação entre o tempo de execução do algoritmo de Ordenação por Inserção e o número de inversões do vetor de entrada? Justifique sua resposta.

(d) Apresente um algoritmo que determina o número de inversões em qualquer permutação de n elementos no pior caso em tempo $\Theta(n \log n)$. (Dica: modifique o Mergesort.)

Questão 7 [CLSR, Ex 3.1-1, pg 50]

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções assintoticamente não-negativas. Usando a definição básica da notação Θ, prove que

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)).$$

Questão 8 [CLSR, Ex 3.1-2, pg 50]

Mostre que para quaisquer constantes reais a e b, tal que $b > 0$,

$$(n + a)^b = \Theta(n^b).$$

Questão 9 **[CLSR, Ex 3.1-4, pg 50]**

Mostre se:

(a) $2^{n+1} \stackrel{?}{=} O(2^n)$.

(b) $2^{2n} \stackrel{?}{=} O(2^n)$.

Questão 10 **[CLSR, Ex 3.1-8, pg 50]**

Pode-se estender a notação assintótica para o caso de dois parâmetros n e m que vão para infinito independentemente com taxas diferentes. Para uma dada função $g(n,m)$, denota-se $O(g(n,m))$ o conjunto de funções

$$O(g(n,m)) = \left\{ \begin{array}{c} f(n,m) \text{: existem constantes positivas } c,\ n_0, \text{ e } m_0 \text{ tais que} \\ 0 \leq f(n,m) \leq cg(n,m) \\ \forall n \geq n_0 \text{ e } m \geq m_0. \end{array} \right\}$$

Apresente as definições correspondentes para:

(a) $\Omega(g(n,m))$

(b) $\Theta(g(n,m))$

Questão 11 **[CLSR, Ex 3.2-4, pg 57]**

Mostre se:

(a) A função $\lceil \log n \rceil !$ é limitada polinomialmente.

(b) A função $\lceil \log \log n \rceil !$ é limitada polinomialmente.

Questão 12 **[CLSR, Problema 3-2, pg 58]**

(*Crescimento assintótico relativo.*) Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo, se A é O, o, Ω, ω, ou Θ de B. Assuma que $k \geq 1$, $\epsilon > 0$, e $c > 1$ são constantes. Sua resposta deve ser na forma SIM ou NÃO acompanhada da justificativa.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(a)	$log^k n$	n^ϵ					
(b)	n^k	c^n					
(c)	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
(d)	2^n	$2^{n/2}$					
(e)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
(f)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

Questão 13 **[CLSR, Problema 3-3, pg 58]**

(*Ordenação por taxa de crescimento assintótico.*)

(a) Classifique as funções abaixo pela ordem de crescimento, ou seja, ache uma permutação das funções $g_1, g_2, \ldots, g_{30}$ que satisfaça a relação $g_1 = \Omega(g_2), g_2 = \Omega(g_3), \ldots, g_{29} = \Omega(g_{30})$. Particione a lista em classes de equivalência tais que $f(n)$ e $g(n)$ estão na mesma classe se, e somente se, $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\log(\log^* n)$	$2^{\log^* n}$	$(\sqrt{2})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(\frac{3}{2})^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{\log n}}$
$\ln \ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log \log n}$	$\log n$	1
$2^{\log n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^*(\log n)$	$2^{\sqrt{2 \log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

A notação $\log^* n$ representa a função logarítmica "iterada" como definida na página 55 de CLRS.

(b) Apresente um exemplo de uma função $f(n)$ não-negativa tal que para todas as funções $g_i(n)$ da letra anterior, $f(n)$ não é $O(g_i(n))$ nem $\Omega(g_i(n))$.

Questão 14 [CLSR, Ex 4.2-5, pg 72]

Use uma árvore de recursão para apresentar uma solução assintoticamente firme para a recorrência

$$T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn,$$

onde α é uma constante na faixa $0 < \alpha < 1$ e $c > 0$ é também uma constante.

Questão 15 [CLSR, Ex 4.3-1, pg 75]

Use o Teorema Mestre, se for possível, para apresentar limites assintóticos firmes para as seguintes recorrências:

(a) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

(b) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$

(c) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

Questão 16 [CLSR, Ex 4.3-2, pg 75]

A recorrência $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$ descreve o tempo de execução de um algoritmo A. Um algoritmo alternativo A' tem um tempo de execução $T'(n) = aT'(\frac{n}{4}) + n^2$. Qual é o maior número inteiro a que faz com A' seja assintoticamente mais rápido que A?

Questão 17 [CLSR, Ex 4.3-4, pg 75]

O Teorema Mestre pode ser aplicado à recorrência $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$? Justifique a sua resposta. Apresente um limite superior assintótico para essa recorrência.

Questão 18 [CLSR, Problema 4-1, pg 85]

(*Exemplos de recorrência.*) Apresente os limites assintóticos superior e inferior para $T(n)$ em cada uma das recorrências abaixo. Assuma que $T(n)$ é constante para $n \leq 2$. Tente achar cada limite tão firme quanto possível e justifique a sua resposta.

(a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3$

(b) $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + n$

(c) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$

(d) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$

(e) $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$

(f) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

(g) $T(n) = T(n-1) + n$

(h) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Para cada um dos problemas abaixo, escreva o algoritmo, faça a implementação na linguagem C ou C++, testes e apresente o custo de complexidade identificando a operação considerada relevante. No caso de apresentar uma solução recursiva, discuta também e apresente a complexidade para o crescimento da pilha.

Questão 19 Fatorial de Números Grandes

Faça um programa que permita calcular o fatorial de números relativamente grandes como o fatorial de 10000. Você não deve usar qualquer biblioteca de suporte da linguagem C++. O problema deve ser resolvido usando apenas a memória principal com a menor quantidade possível de espaço. O objetivo deste trabalho é estudar a complexidade de espaço. Procure implementar também a operação de multiplicação da forma mais eficiente possível. Procure na literatura algoritmos eficientes para multiplicação de números inteiros.

Sugestão: use um *nibble* (metade de um octeto ou byte) para armazenar um algarismo decimal ou, melhor ainda, algarismo hexadecimal.

Questão 20 Decomposição de Números

Faça um programa recursivo para gerar a decomposição de um número inteiro positivo na soma de todos os possíveis fatores como mostrado a seguir. Por exemplo, para $n = 5$, temos:

```
5
4 + 1
3 + 2
3 + 1 + 1
2 + 2 + 1
2 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1
```

Questão 21 Espiral Quadrada

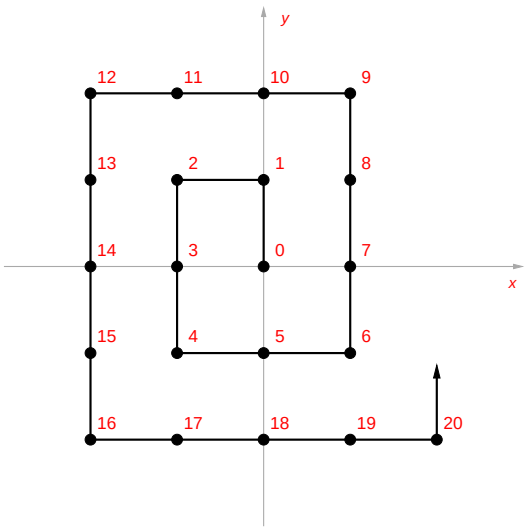
Seja a espiral quadrada como apresentada abaixo. Faça um programa que apresente as coordenadas (x, y) de um dado ponto n fornecido na entrada. Apresente três algoritmos distintos que executam no pior caso em:

(a) $O(1)$

(b) $O(\sqrt{n})$

(c) $O(n)$

(d) Você conhece algum problema "não usual" que tenha algoritmos com complexidades tão diferentes com o da Espiral Quadrada? Se sim, enuncie esse problema e indique os algoritmos e/ou referências para sua solução.



Questão 22 Máxima Soma

Dado um vetor com n números inteiros, determine a máxima soma encontrada em um sub-vetor contíguo desse vetor. Se todos números forem negativos assumir que a soma vale 0. A figura abaixo à esquerda mostra um vetor com 10 elementos. Nesse caso, a máxima soma é 187, dada pela soma dos elementos contíguos do sub-vetor de índices de 3 a 7, como mostrado na figura à direita.

Tente apresentar um algoritmo com custo de execução menor que $O(n^2)$.

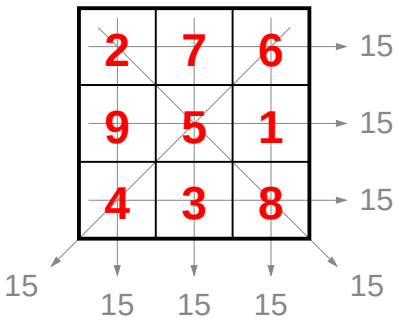
31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Questão 23 Quadrado Mágico

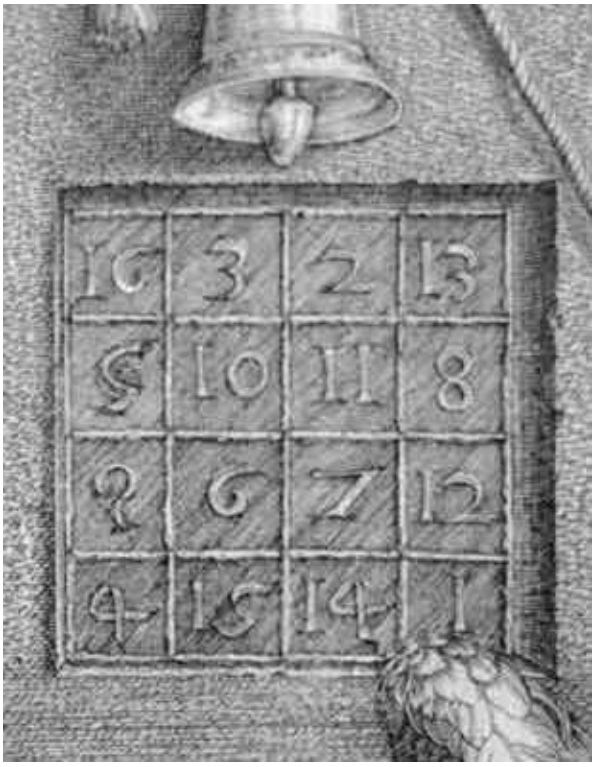
Quadrado Mágico é um quadrado de lado n, onde a soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais é constante. Em cada posição do quadrado pode-se colocar um número entre 1 e n^2, sendo que cada número só pode aparecer uma única vez.

A figura abaixo mostra uma possível solução para o quadrado mágico de lado $n = 3$.



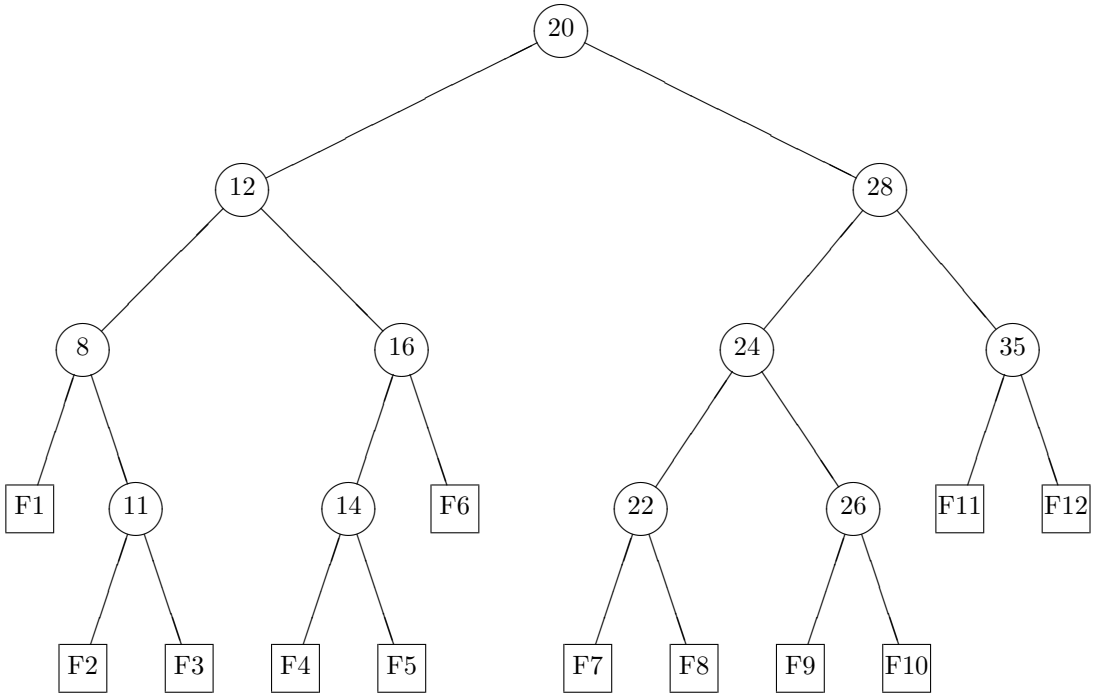
Gere o quadrado mágico para $3 \leq n \leq 10$.

Quadrado Mágico e Arte. Um quadrado mágico de lado $n = 4$ aparece na obra "Melancolia I" (1514) de Albrecht Dürer, um dos maiores artistas alemães do Renascimento. Veja essa obra com o detalhe do quadrado mágico no lado direito.



"Melancolia I, como Dürer denomina a gravura que mostra um céu noturno iluminado apenas por um cometa, é o trabalho de maior conteúdo simbólico dentre todos os trabalhos deste artista. A mulher robusta refletindo sobre a fórmula que faz o mundo óbvio é não somente uma versão feminina de Fausto, comparável ao Jeremiah pintado por Michelangelo dois anos antes no teto da Capela Sistina, como também o oposto de Jerome em seu estudo. O santo dominou o caos que envolve Melancolia e colhe os frutos de seus esforços incansáveis, alcançando o ápice da vida. Melancolia ainda procura, em partes, pelo todo; ela ainda não atingiu a despreocupação de um estudo. Abandonado à inclemência da natureza durante a noite, o arco-íris anuncia sucesso. Acima da mulher, na parede sólida da casa, há uma balança, uma ampulheta, um sino e um quadro mágico, em que a soma dos números em qualquer direção é 34. A base do trabalho de Dürer era a adição e a mensuração exatas e, em Melancolia, são uma base segura para organizar uma nova estrutura para o mundo, a partir de utensílios de arquitetura e carpintaria. O bloco multifacetado, colossal, contrasta com a harmonia perfeita da esfera iluminada no primeiro plano. À época, muito se teorizava sobre os quatro humores humanos: sangüíneo, fleumático, colérico e melancólico. Esta gravura em metal é um trabalho de arte de significância filosófica atemporal." (Horst Michael, Albrecht Dürer – The Complete Engravings, Artline Editions, 1987.)

Questão 24 Caminhamentos em Árvore Binária de Pesquisa



Exemplo de uma árvore binária de pesquisa.

(a) Escreva um procedimento recursivo baseado em um dos caminhamentos em árvore binária para calcular a altura dessa árvore.

(b) Em cada entrada da tabela abaixo, diga SIM se a combinação linha/coluna é sempre verdadeira e NÃO, caso contrário.

	pré-ordem(n) $\prec$ pré-ordem(m)	in-ordem(n) $\prec$ in-ordem(m)	pós-ordem(n) $\prec$ pós-ordem(m)
n está a esquerda de m			
n está a direita de m			
n é um ancestral de m			
n é um descendente de m			

A expressão $x \prec y$ significa que x precede y no caminhamento em questão. Um nó esta à esquerda ou à direita de outro se e somente se eles têm um ancestral em comum.

(c) O caminhamento por nível de uma árvore primeiro lista a raiz, depois todos os nós que estão no nível 1, depois todos os nós no nível 2, etc. Escreva um programa $O(n)$ (onde n é o número de nós na árvore) para listar todos os nós de uma árvore por nível (em cada nível, do nó mais à esquerda para o mais à direita).

(d) Escreva um procedimento para listar todos os caminhos da raiz até os nós folhas.