Relações

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Introdução

- O mundo está "povoado" por relações: família, emprego, governo, negócios, etc.

- Entidades em Matemática e Ciência da Computação também podem estar relacionadas entre si de diversas formas.

- Objetivo:
  - estudar relações em conjuntos;
  - estudar formas de representar relações;
  - estudar propriedades de relações.

Relações em conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Suponha que um elemento x em A esteja relacionado com um elemento y em B sse $x < y$.

A notação xRy quer dizer que "x está relacionado com y", onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).

Logo, temos que:

$$\begin{array}{lll} 0R1 & \text{porque} & 0 < 1, \\ 0R2 & \text{porque} & 0 < 2, \\ 0R3 & \text{porque} & 0 < 3, \\ 1R2 & \text{porque} & 1 < 2, \\ 1R3 & \text{porque} & 1 < 3, \\ 2R3 & \text{porque} & 2 < 3 \end{array}$$

Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que "x não está relacionado com y."

Relações em conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Logo, temos que:

$$\begin{array}{lll} 1 \not R 1 & \text{porque} & 1 \not< 1, \\ 2 \not R 1 & \text{porque} & 2 \not< 1, \\ 2 \not R 2 & \text{porque} & 2 \not< 2 \end{array}$$

Relações em conjuntos

- O produto cartesiano de A e B, é definido por

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

- Para este exemplo ($A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$), temos que:

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e os elementos que satisfazem a relação são

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Relações em conjuntos

<u>Definição</u> (Relação (binária)):

– Sejam os conjuntos A e B.
– Uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$.
– Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R, escrito xRy, sse $(x, y) \in R$.
– O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Notação:

- “x está relacionado com y”:

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

- “x não está relacionado com y”:

$$x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R$$

Relação binária num conjunto finito

$\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária R de A para B como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \text{ é par}$$

Logo, temos que

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$. Neste caso, a relação binária E de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ pode ser definida como:

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mEn \Leftrightarrow m - n \text{ é par}$$

➜ Os inteiros m e n são relacionados por E sse

$$m \bmod 2 = n \bmod 2,$$

ou seja, se os números m e n são pares ou ímpares.

- Quando essa relação é satisfeita, diz-se que m e n são congruentes módulo 2

$$m \equiv n \bmod 2$$

Exemplos de relações binárias

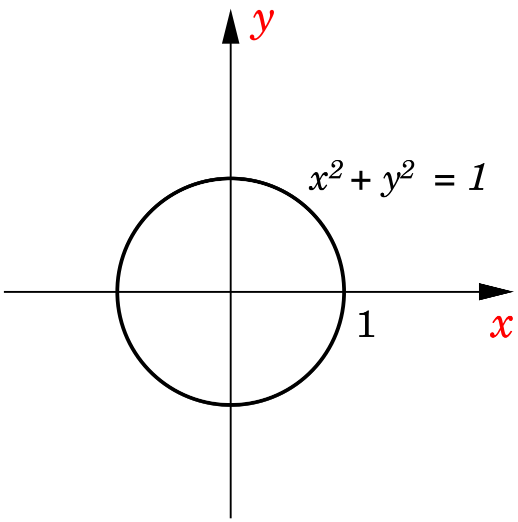
$\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Seja a relação C de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

– $(1, 0) \in C$?
  Sim.

– $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in C$?
  Sim.

– $(-2, 0) \in C$?
  Não.



Exemplos de relações binárias

Exemplo 3 Seja A o conjunto de todos os strings de tamanho 6 formados de x's e y's. O conjunto A é representado por Σ^6 onde $\Sigma = \{x, y\}$.

Seja a relação binária R de A para A definida como:

$$sRt \Leftrightarrow \text{substr}(s, 1, 4) = \text{substr}(t, 1, 4)$$

– $xxyxyxRxxxyxy$?
  Não.

– $yxyyyxRyxyyxy$?
  Sim.

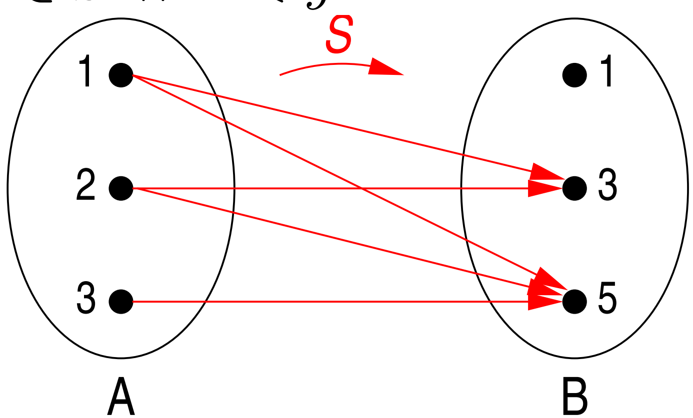
Diagrama de seta de uma relação

- Suponha que R é uma relação de um conjunto A para um conjunto B. O "diagrama de seta" para R é obtido da seguinte forma:
  1. Represente os elementos de A numa região e os elementos de B como pontos em outra região.
  2. Para cada x em A e y em B, desenhe uma seta de x para y sse x é relacionado com y por R. Simbolicamente:
     - ➜ Desenhe uma seta de x para $y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

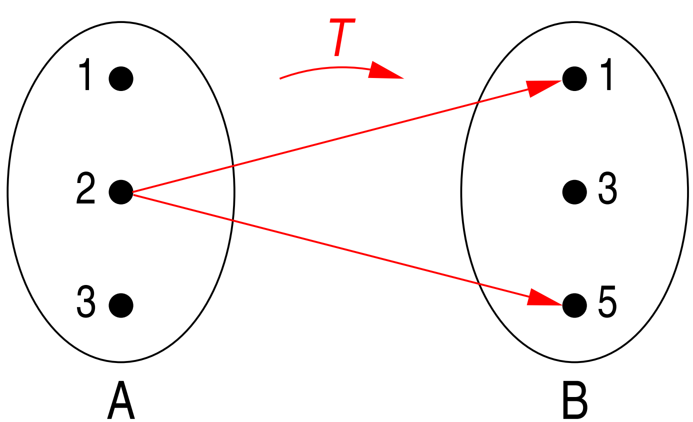
Exemplos de relações binárias

$\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e as relações:

- $\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \Leftrightarrow x < y$



- $T = \{(2, 1), (2, 5)\}$



Relações e funções

Definição:

Uma função F de um conjunto A para um conjunto B é uma relação de A para B que satisfaz as duas propriedades abaixo:

1. Para cada elemento x em A, existe um elemento y em B tal que $(x, y) \in F$.

   ➜ cada elemento de A é o primeiro elemento de um par ordenado de F.

2. Para todos elementos x em A e y e z em B,

$$\text{se } (x, y) \in F \text{ e } (x, z) \in F, \text{ então } y = z$$

   ➜ não existem dois pares ordenados distintos cujo primeiro elemento seja o mesmo.

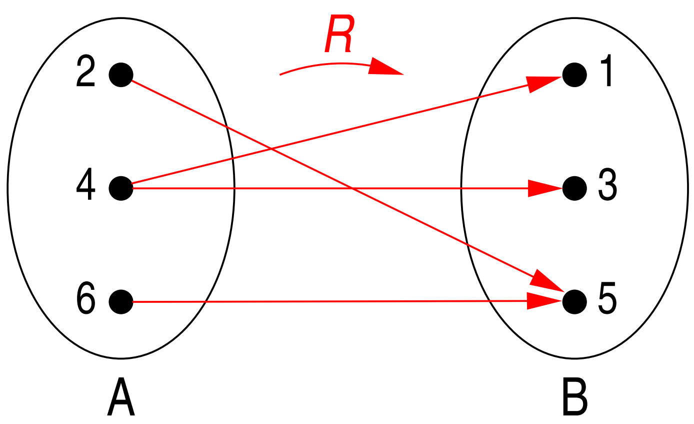
Se F é uma função de A para B, temos que

$$y = F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in F$$

Relações e funções

$\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

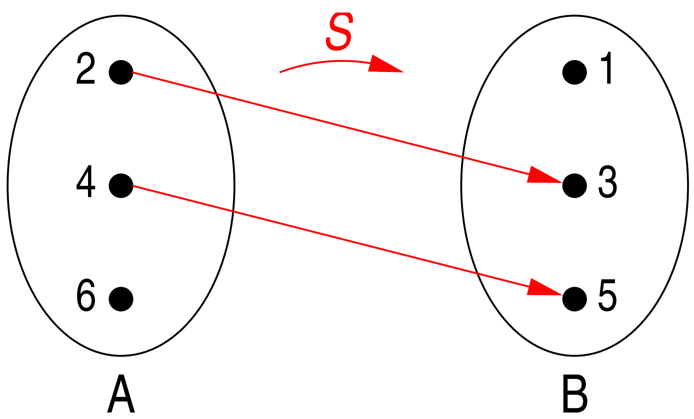
- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$. R é uma função?
  Não, por causa dos pares $(4, 1)$ e $(4, 3)$.



Relações e funções

$\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

– $S : \forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \Leftrightarrow y = x + 1$. S é uma função?
Não, já que $6 \in A$ mas não existe $y \in B | y = 6 + 1 = 7$.



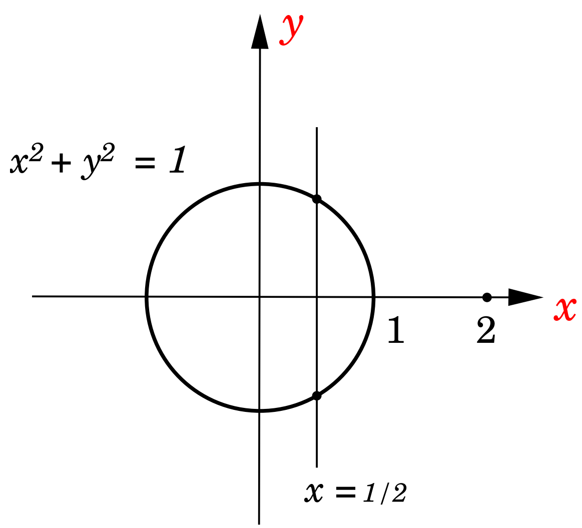
Funções e relações nos conjuntos dos reais

$\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Seja a relação C de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

C é uma função?

Não, já que existem números reais $x \mid (x, y) \notin C$ para todo y. Por exemplo, $x = 2$.



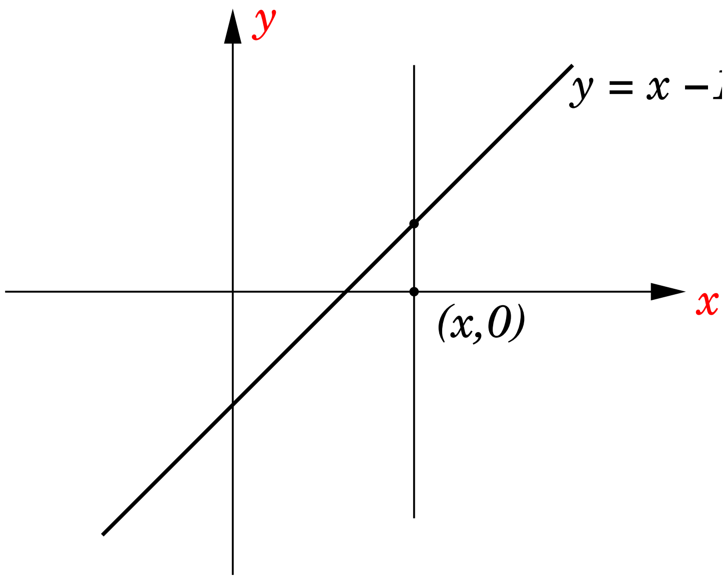
Funções e relações nos conjuntos dos reais

$\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Seja a relação L de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \Leftrightarrow y = x - 1$$

L é uma função?

Sim.



O inverso de uma relação

- Definição:
  Seja R uma relação de A para B. A relação inversa R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in R\}.$$

- Essa definição pode ser re-escrita operacionalmente como

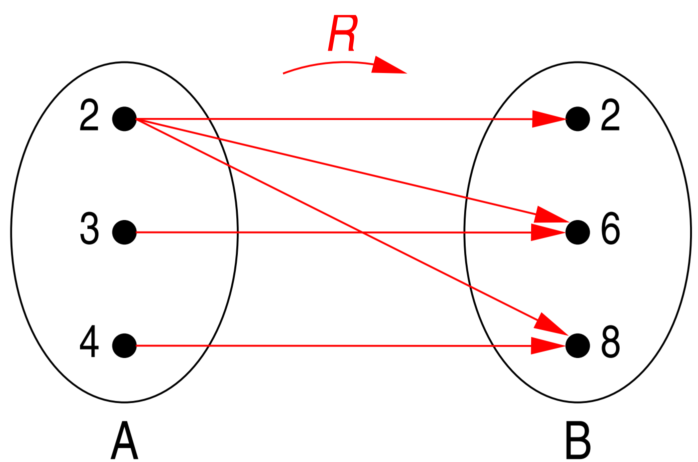
$$\forall x \in X, y \in Y, (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

O inverso de uma relação

$\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação "divide" de A para B:

$$\forall (x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y$$

– $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$



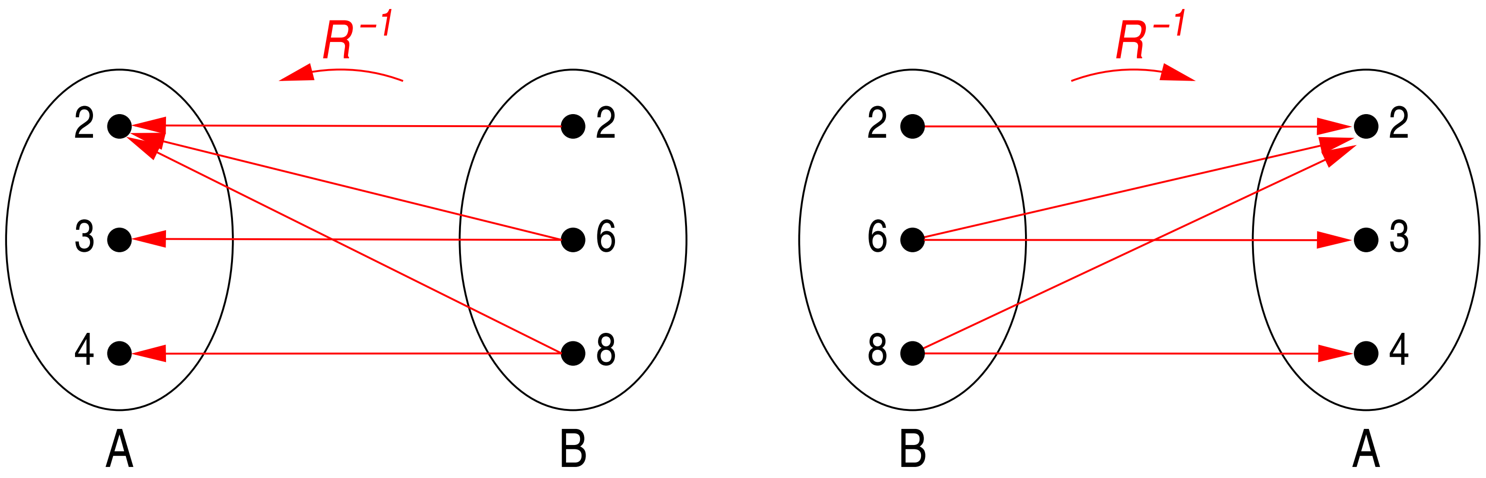
O inverso de uma relação

$\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação "divide" de A para B:

$$\forall(x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y$$

$$R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$$

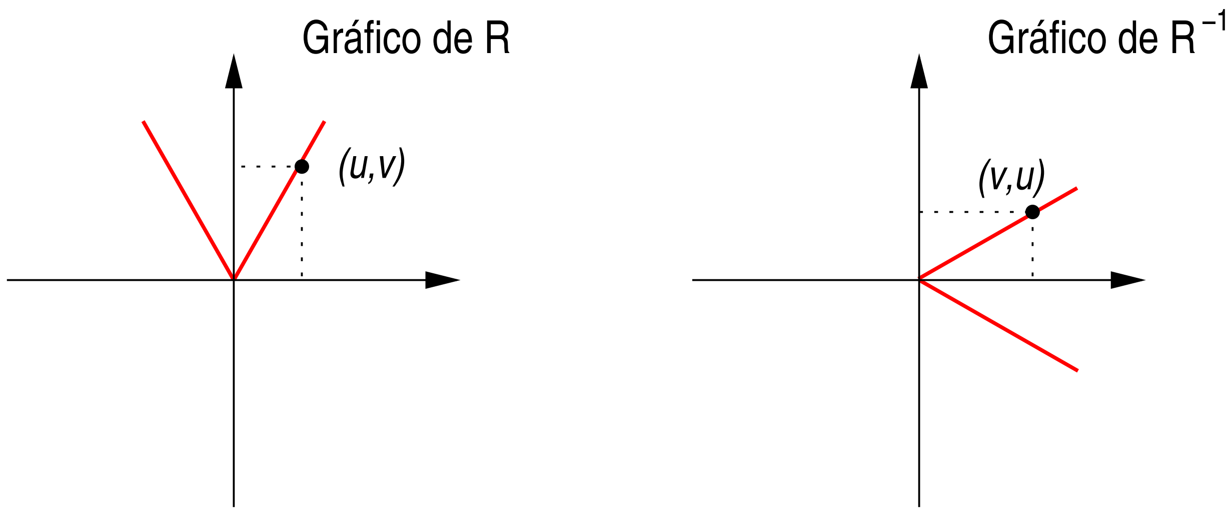
– $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$
– R^{-1} : $\forall(y, x) \in B \times A, yR^{-1}x \Leftrightarrow y$ é um múltiplo de x.



Inverso de uma relação infinita

Exemplo 11 Seja a relação R de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, uRv \Leftrightarrow v = 2 \cdot |u|$$



A relação R^{-1} é uma função?

Não, já que os pares $(2, 1)$ e $(2, -1)$ estão em R^{-1}.

Grafo dirigido de uma relação

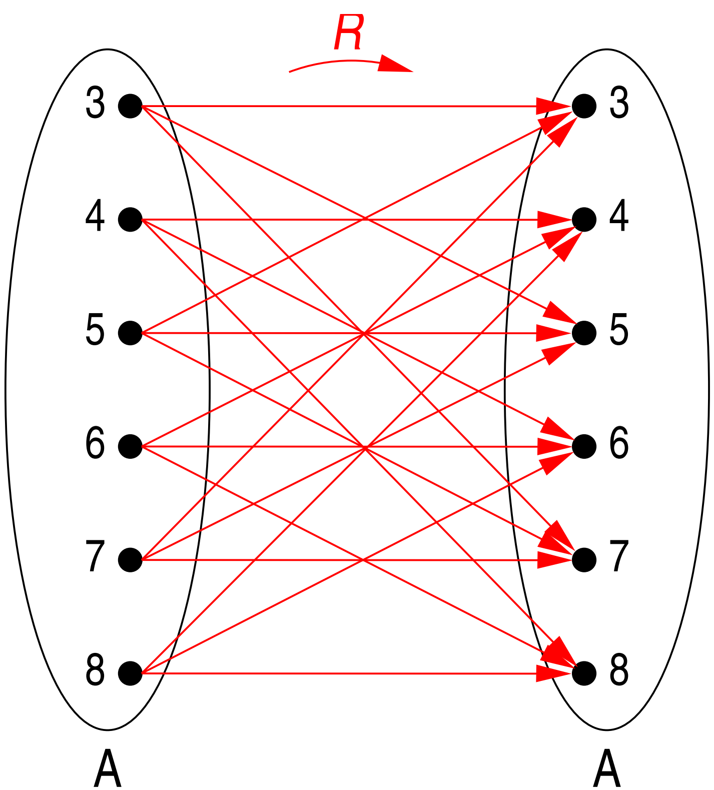
- Definição (relação binária): Uma relação binária no conjunto A é uma relação binária de A para A.

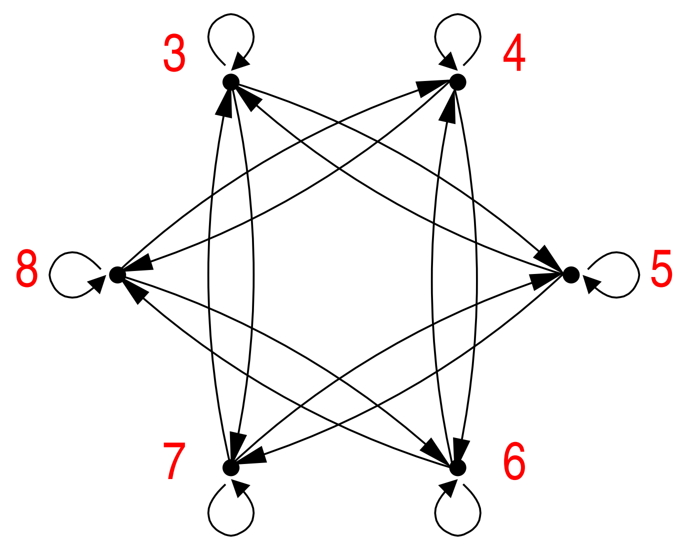
- Neste caso, o diagrama de seta é modificado e torna-se um "grafo dirigido," ou seja, o conjunto A é desenhando somente uma vez e uma seta é desenhada para cada par de pontos relacionados entre si.

Grafo dirigido de uma relação

$\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Seja $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 2|(x - y)$$





Relações n-árias

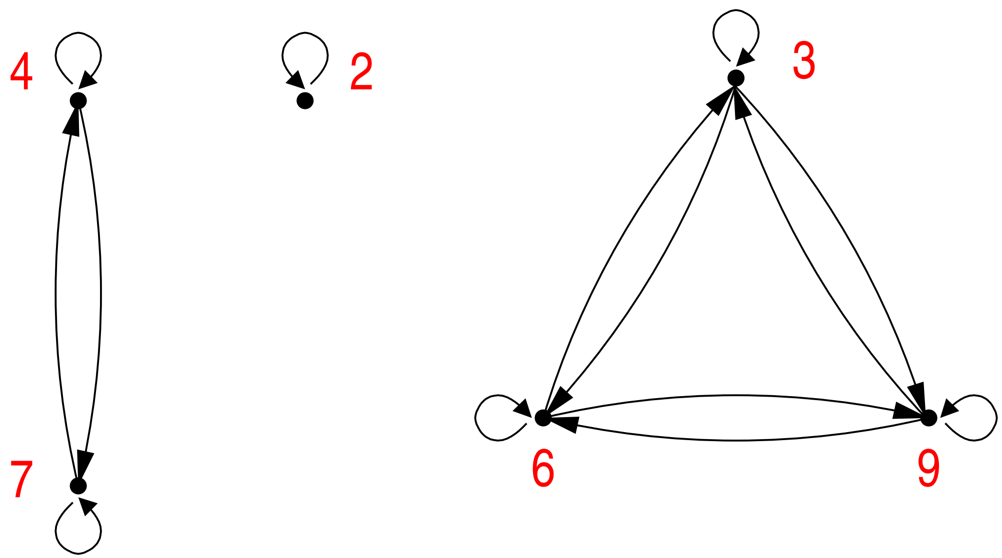
<u>Definição</u>: Dados os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uma relação n-ária R em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Relações envolvendo dois, três e quatro conjuntos são chamadas de binárias, ternárias e quaternárias, respectivamente.

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 3|(x - y)$$



Propriedades de relações

Exemplo 13 Este grafo tem três propriedades importantes:

1. Cada ponto do grafo tem uma seta para o próprio ponto.

2. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q, existe uma seta indo do ponto q para o ponto p.

3. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q e do ponto q para um ponto r, existe uma seta indo do ponto p para o ponto r.

➜ Essas propriedades correspondem a relações gerais chamadas de reflexiva, simétrica e transitiva.

Propriedades de relações

Seja R uma relação binária no conjunto A.

1. R é **reflexiva** sse, $\forall x \in A, xRx$.
   ➜ Cada elemento é relacionado consigo mesmo.

2. R é **simétrica** sse, $\forall x, y \in A$, se xRy então yRx.
   ➜ Cada elemento relacionado com um outro, o segundo é relacionado com o primeiro.

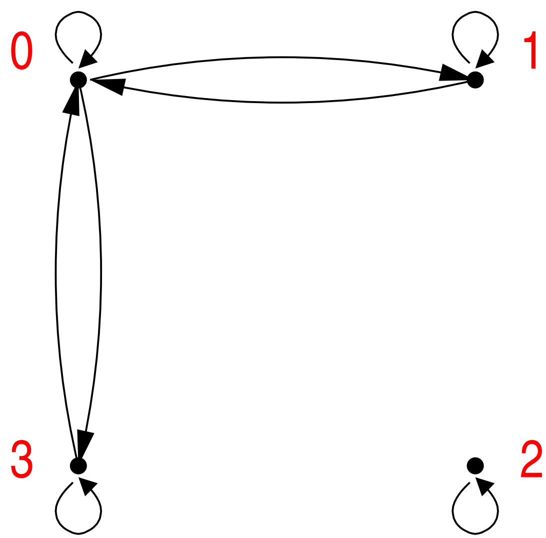
3. R é **transitiva** sse, $\forall x, y, z \in A$, se xRy e yRz então xRz.
   ➜ Cada elemento relacionado com um segundo, o segundo é relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro.

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como:

$$R = \{(0,0),(0,1),(0,3),(1,0),(1,1),(2,2),(3,0),(3,3)\}$$

Diga se a propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?



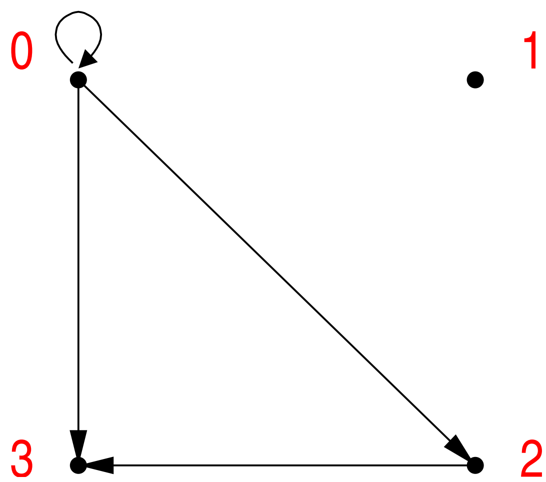
- Reflexiva (**V**): Existe um laço para cada nó do grafo o que significa que cada elemento de A é relacionado consigo mesmo.
- Simétrica (**V**): Para cada aresta de "ida" existe uma aresta de "volta".
- Transitiva (**F**): Temos $1R0$ e $0R3$ mas não temos $1R3$, o que implica na não transitividade.

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária S definida como:

$$S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?



- Reflexiva (**F**): Não existe, por exemplo, $1R1$.
- Simétrica (**F**): Para cada aresta de "ida" não existe uma aresta de "volta".
- Transitiva (**V**): Temos

Hipótese	Conclusão
$(0, 2)$ e $(2, 3)$	$(0, 3)$
$(0, 0)$ e $(0, 2)$	$(0, 2)$
$(0, 0)$ e $(0, 3)$	$(0, 3)$

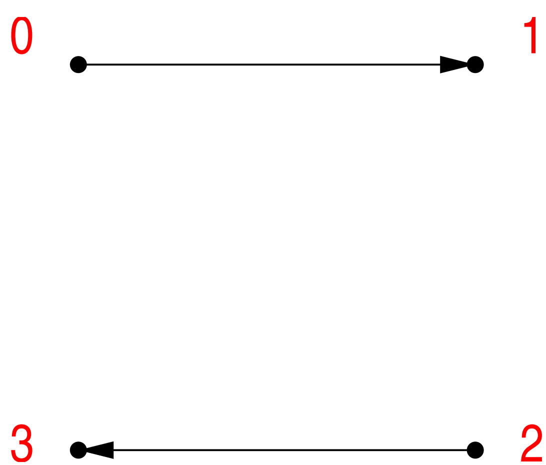
➜ Os elementos x, y e z não precisam ser distintos.

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária T definida como:

$$T = \{(0, 1), (2, 3)\}$$

Diga se a propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?



- Reflexiva (**F**): Não existe nenhum laço.
- Simétrica (**F**): Para cada aresta de "ida" não existe uma aresta de "volta".
- Transitiva (**V**): Por *default*. A transitividade não é satisfeita quando a hipótese é verdadeira e a conclusão é falsa, ou seja,

$$(x, y) \in T \text{ e } (y, z) \in T \text{ e } (x, z) \notin T$$

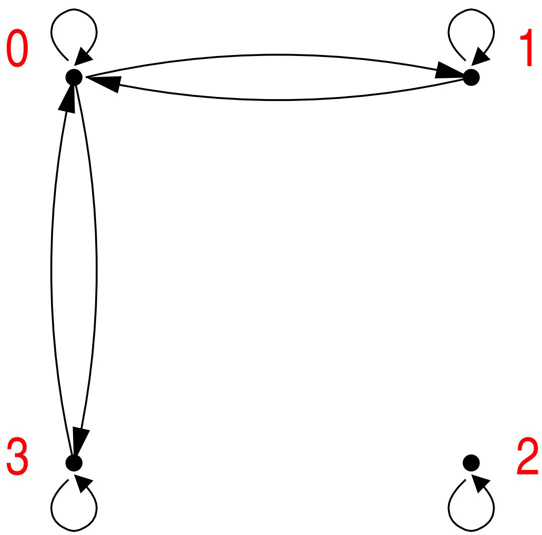
Como não existem pares (x, y) e (y, z) que satisfazem a hipótese a conclusão da afirmação é verdadeira.

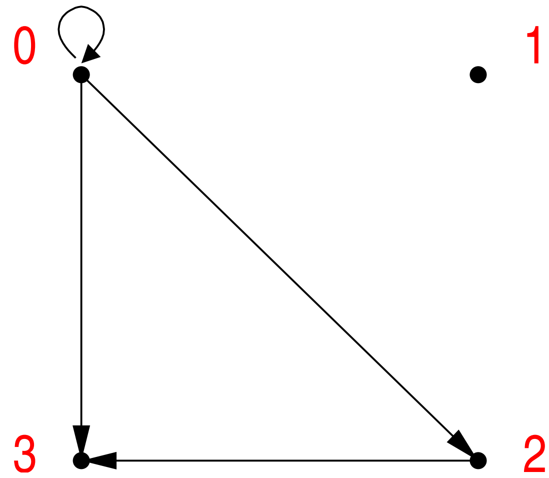
Verificando propriedades de relações através de um programa

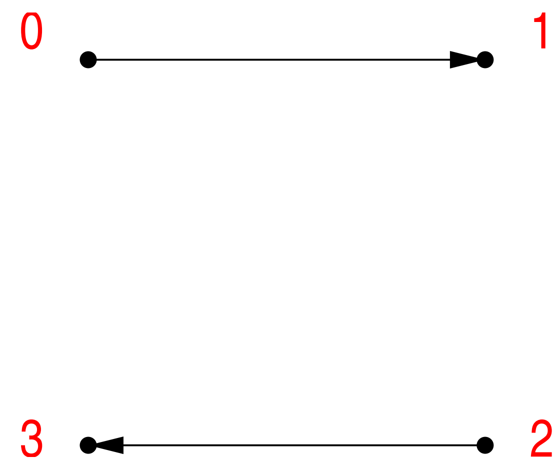
- Seja uma relação binária R definida num conjunto finito A com n elementos.
  - É possível verificar através de um programa se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Possível implementação:
  - ➜ Representar R por uma matriz booleana quadrada de tamanho n.
  - ➜ A linha corresponde ao primeiro elemento do par ordenado e a coluna ao segundo elemento do par ordenado (consequentemente a matriz não é simétrica).

Verificando propriedades de relações através de um programa







2º elemento / 1º elemento

	0	1	2	3
0	V	V		V
1	V	V		
2			V	
3	V			V

2º elemento / 1º elemento

	0	1	2	3
0	V		V	V
1				
2				V
3				

2º elemento / 1º elemento

	0	1	2	3
0		V		
1				
2				V
3				

Fecho de uma relação

Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade p, podemos "estender" R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.

Estender significa que a nova relação R^* em A contém todos os pares de R e os pares adicionais necessários para que a propriedade p seja válida.

Definição [Fecho de uma relação]: Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e uma propriedade p. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* tem a propriedade p;
2. $R \subseteq R^*$;
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p, então $R^* \subseteq S$.

Fecho de uma relação

Podemos definir os seguintes fechos:

- reflexivo;
- simétrico;
- transitivo

de uma relação em um conjunto.

Se uma relação binária R definida em um conjunto A já possui a propriedade p, ela já é seu próprio fecho que satisfaz a propriedade p.

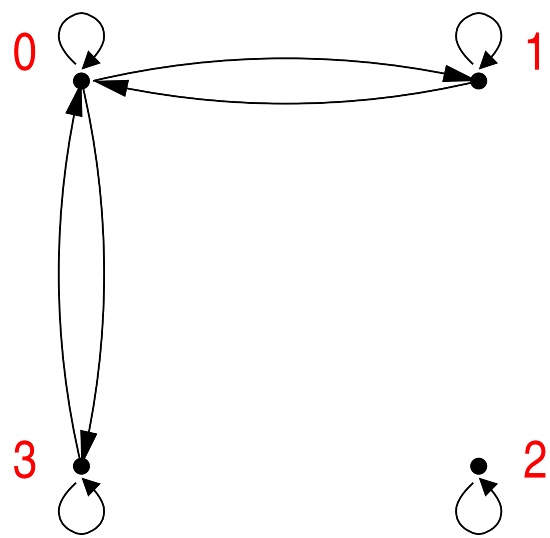
Fecho transitivo de uma relação

Definição [Fecho transitivo de uma relação]: Seja A um conjunto e R uma relação binária em A. O fecho transitivo (*transitive closure*) de R é a relação binária R^t em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^t é transitiva;
2. $R \subseteq R^t$;
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R, então $R^t \subseteq S$.

Fecho transitivo de uma relação

$\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como $R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$.



Hipótese	Conclusão
$(0,0)$ e $(0,0)$	$(0,0)$
$(0,0)$ e $(0,1)$	$(0,1)$
$(0,0)$ e $(0,3)$	$(0,3)$
$(1,0)$ e $(0,1)$	$(1,1)$
$(1,0)$ e $(0,3)$	$(1,3)^\star$
$(1,1)$ e $(1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$ e $(1,1)$	$(1,1)$
$(2,2)$ e $(2,2)$	$(2,2)$
$(3,0)$ e $(0,0)$	$(3,0)$
$(3,0)$ e $(0,1)$	$(3,1)^\star$
$(3,0)$ e $(0,3)$	$(3,3)$
$(3,3)$ e $(3,3)$	$(3,3)$

* Não faz parte da relação original.

$R^t = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (1,3), (2,2), (3,0), (3,1), (3,3)\}$.

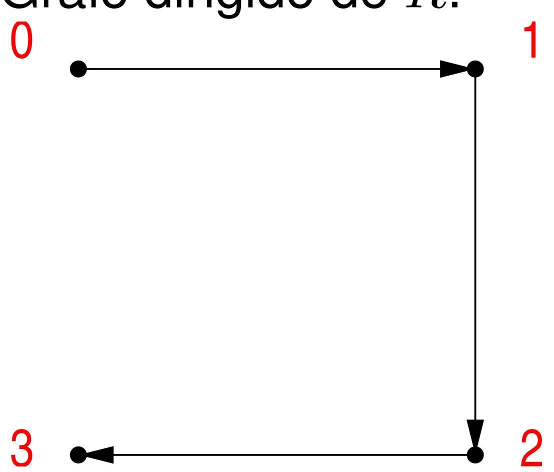
Fecho transitivo de una relação

$\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação R definida em A como:

$$R = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$$

Determine a relação de fecho transitivo de R.

Grafo dirigido de R:



Hipótese	Conclusão
$(0,1)$ e $(1,2)$	$(0,2)^\star$
$(1,2)$ e $(2,3)$	$(1,3)^\star$
$(0,2)^\star$ e $(2,3)$	$(0,3)^\star$

* Não faz parte da relação original.

Assim,

$$R^t = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

Fecho transitivo de uma relação

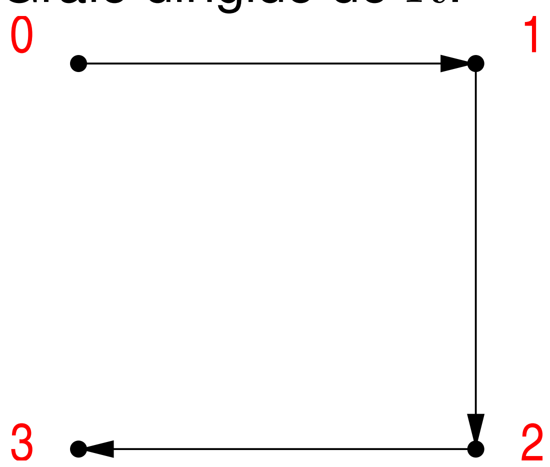
Exemplo 18 Dado $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação R definida em A como:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

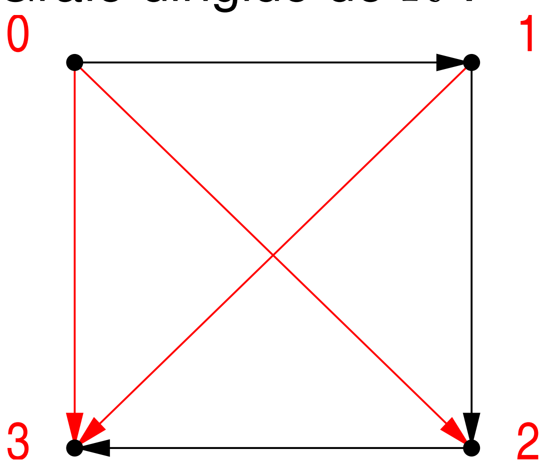
temos

$$R^t = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Grafo dirigido de R:



Grafo dirigido de R^t:



Propriedades de relações em conjuntos infinitos

- Suponha uma relação binária é definida em um conjunto infinito A.

- Para provar que a relação é reflexiva, simétrica e transitiva:
  – Escreva o que deve ser provado. Por exemplo, para simetria:

$$\forall x, y \in A, \text{ se } xRy \text{ então } yRx$$

  – Use as definições do conjunto A e da relação R para reescrever a propriedade. Para a relação de “igualdade” no conjunto dos números reais, temos:

$$\forall x, y \in A, \text{ se } x = y \text{ então } y = x$$

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

$\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Seja S uma relação no conjunto $\mathbb{R}$ tal que para todos

$$x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow x < y$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

$\boxed{\text{Exemplo 19}}$

Reflexiva (**F**): S é reflexiva sse

$$\forall x \in \mathbb{R}, xSx.$$

Pela definição de S, isto significa

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < x.$$

Para provar que essa afirmação é falsa, basta achar um contra-exemplo. Neste caso, a afirmação é falsa para todos os números reais já que $x \not< x$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19

Simétrica (**F**): S é simétrica sse

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{se } xSy \text{ então } ySx.$$

Pela definição de S, isto significa

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{se } x < y \text{ então } y < x.$$

Para provar que essa afirmação é falsa, basta achar um contra-exemplo. Neste caso, a afirmação é falsa para todos os números reais já que se $x < y$, então $y \not< x$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19

Transitiva (**V**): S é transitiva sse

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ se } xSy \text{ e } ySz \text{ então } xSz.$$

Pela definição de S, isto significa

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ se } x < y \text{ e } y < z \text{ então } x < z.$$

Essa afirmação é verdadeira pela lei transitiva da ordem dos números reais.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

$\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Seja T uma relação no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros tal que para todos

$$m, n \in \mathbb{Z}, mTn \Leftrightarrow 3|(m - n)$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Reflexiva (**V**): T é reflexiva sse

$$\forall m \in \mathbb{Z}, mTm.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|(m - m),$$

ou ainda,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|0.$$

Essa afirmação é verdadeira já que $0 = 3 \cdot 0$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Simétrica (**V**): T é simétrica sse

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ então } nTm.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m-n) \text{ então } 3|(n-m).$$

Suponha que m e n sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m-n)$. Deve-se mostrar que $3|(n-m)$. Pela definição de "divide" temos que $3|(m-n)$ e $m-n = 3k$ e $n-m = 3 \cdot -k$, para algum inteiro k. Logo, $3|(n-m)$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Transitiva (**V**): T é transitiva sse

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ e } nTo \text{ então } mTo.$$

Pela definição de T, isto significa

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m-n) \text{ e } 3|(n-o) \text{ então } 3|(m-o).$$

Suponha que m, n e o sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m-n)$ e $3|(n-o)$. Deve-se mostrar que $3|(m-o)$. Pela definição de "divide" temos que: $3|(m-n)$ e $m-n=3r$; e $3|(n-o)$ e $n-o=3s$, para inteiros r e s, respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} (m-n)+(n-o) &= 3r+3s \\ m-o &= 3\cdot(r+s) \end{aligned}$$

O que mostra que $3|(m-o)$.

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Seja C o conjunto de todos os circuitos lógicos com um número fixo n de entradas. Seja E uma relação binária no conjunto C definida como:

Para todos os circuitos $c_1 \in C$ e $c_2 \in C$

$$c_1 E c_2 \Leftrightarrow$$

c_1 tem a mesma tabela de entrada e saída que c_2.

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações

$\boxed{\text{Exemplo 21}}$

Reflexiva (**V**): E é reflexiva sse

$$\forall c \in C, cEc.$$

Pela definição de E, isto significa

$$\forall c \in C, \left(\begin{array}{l} c \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c \end{array} \right).$$

O que é obviamente verdade.

Propriedades de relações

Exemplo 21

Simétrica (**V**): E é simétrica sse

$$\forall c_1, c_2 \in C, \text{ se } c_1 E c_2 \text{ então } c_2 E c_1.$$

Pela definição de E, isto significa

$$\forall c_1, c_2 \in C,$$

$$\text{se} \begin{pmatrix} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_2 \end{pmatrix} \text{então} \begin{pmatrix} c_2 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_1 \end{pmatrix}.$$

Considerando a hipótese verdadeira, a conclusão é obviamente verdadeira.

Propriedades de relações

Exemplo 21

Transitiva (**V**): E é transitiva sse

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in C, \text{ se } c_1 E c_2 \text{ e } c_2 E c_3 \text{ então } c_1 E c_3.$$

Pela definição de E, isto significa

$$\text{se} \quad \left(\begin{array}{l} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_2 \end{array} \right) \text{ e } \left(\begin{array}{l} c_2 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_3 \end{array} \right)$$

$$\text{então} \quad \left(\begin{array}{l} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_3 \end{array} \right).$$

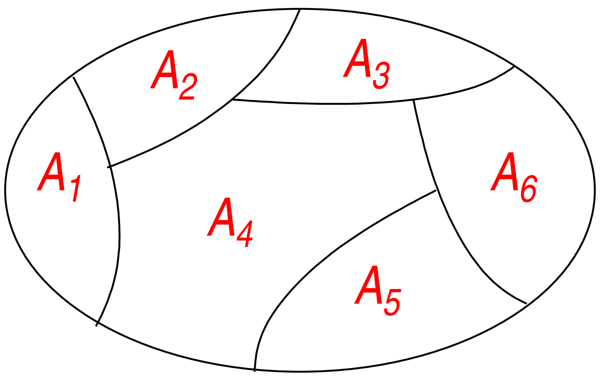
Considerando a hipótese verdadeira, a conclusão é obviamente verdadeira.

Relação de equivalência

- Idéia central de relação de equivalência:
  - Agrupar pares ordenados de uma relação que estão relacionados entre si.

- Partição de um conjunto A:
  - Coleção de subconjuntos não-vazios mutuamente disjuntos cuja união é o conjunto A.

Exemplo 22 Para $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, ou ainda $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = A$



Relação de equivalência

Definição: Dada uma partição de um conjunto A, a relação binária R induzida pela partição é definida em A como:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow \text{Existe um subconjunto } A \text{ da partição tal que ambos } x \text{ e } y \text{ estão em } A.$$

Exemplo 23 Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e considere a seguinte partição de A:

$$\{0, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}$$

Determine a relação R induzida por essa partição.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (0,0),(0,3),(0,4),(3,0),(3,3),(3,4),(4,0),(4,3),(4,4), \\ (1,1), \\ (2,2) \end{array} \right\}$$

Observação importante:

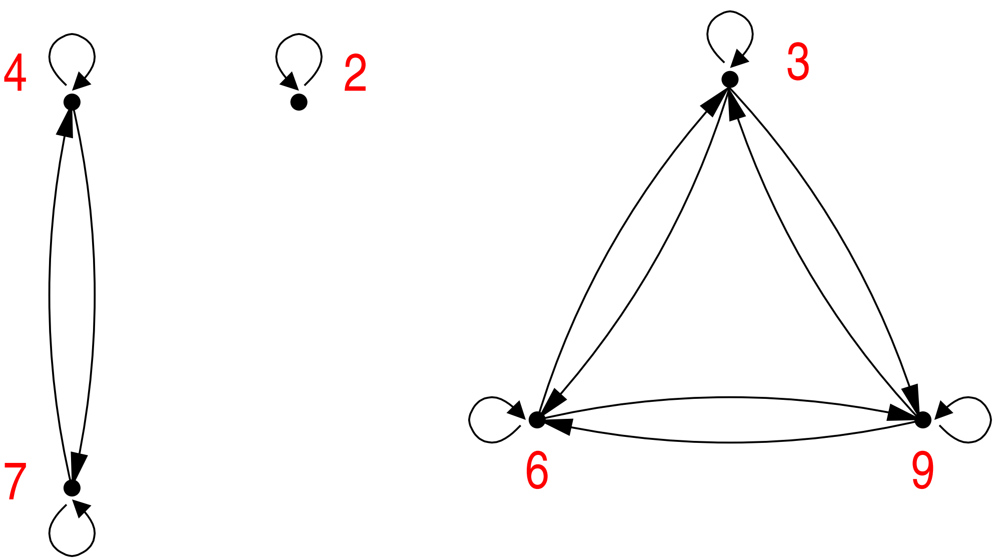
➜ Uma relação induzida por uma partição de um conjunto satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Relação de equivalência

Definição: Seja A um conjunto não-vazio e R uma relação binária em A. R é uma relação de equivalência sse R é reflexiva, simétrica e transitiva.

$\boxed{\text{Exemplo 24}}$ Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 3 | (x - y)$$



A partição de A correspondente à relação R é:

$$\{4, 7\}, \{2\}, \{3, 6, 9\}$$

Classes de equivalência de uma relação equivalência

- Suponha que exista uma relação de equivalência de um dado conjunto. Seja a um elemento particular do conjunto. O subconjunto de todos os elementos que estão relacionados com a é chamado de classe de equivalência de a.

- Definição: Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento $a \in A$, a classe de equivalência de a, representada por $[a]$ e chamada de a é o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tal que x está relacionado com a através de R.
  Simbolicamente, temos:

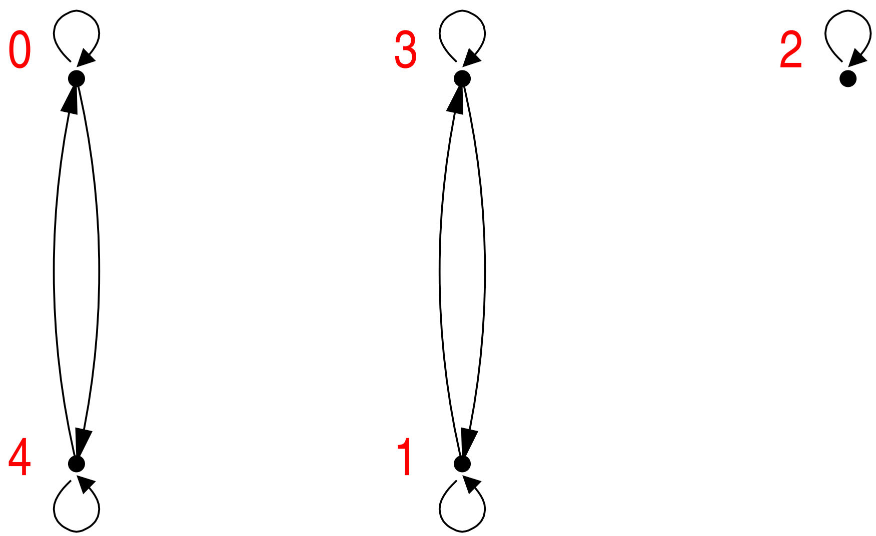
$$[a] = \{x \in A | xRa\}$$

Classes de equivalência de uma relação definida num conjunto finito

Exemplo 25 Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e R uma relação binária em A definida como:

$$\{(0,0),(0,4),(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,0),(4,4)\}$$

R é uma relação de equivalência em A:



As classes de equivalência de R são:

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in A | xR0\} = \{0, 4\} \\
[1] &= \{x \in A | xR1\} = \{1, 3\} \\
[2] &= \{x \in A | xR2\} = \{2\} \\
[3] &= \{x \in A | xR3\} = \{1, 3\} \\
[4] &= \{x \in A | xR4\} = \{0, 4\}
\end{aligned}$$

Assim, as classes distintas de equivalência da relação são:

$$\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}$$

Propriedades das classes de equivalência

- Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência em A e a e b elementos de A:
  1. Se $aRb,$ então $[a] = [b]$
  2. $[a] \cap [b] = \emptyset \qquad \vee \qquad [a] = [b]$

- Se A é um conjunto não vazio e R é uma relação de equivalência em A, então as classes de equivalência distintas de A formam uma partição de A,

  ou seja,

  a união das classes de equivalência é todo o conjunto A e a intersecção de quaisquer duas classes distintas é o conjunto vazio.

Propriedades das classes de equivalência

$\boxed{\text{Exemplo 26}}$ Seja R a relação de congruência módulo 3 no conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros. Isto significa que para todos inteiros m e n,

$$mRn \Leftrightarrow 3|(m-n) \Leftrightarrow m \equiv n \bmod 3$$

Descreva as classes de equivalência distintas de R.

Para cada inteiro a,

$$\begin{aligned}
[a] &= \{x \in \mathbb{Z} | xRa\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | 3|(x-a)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x-a = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + a, \text{ para algum inteiro } k\}.
\end{aligned}$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

Assim,

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 0, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}, \\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 1, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10 \ldots\}, \\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 2, \text{ para algum inteiro } k\} \\
&= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11 \ldots\}.
\end{aligned}$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

Pelas propriedades das classes de equivalência, temos:

$$
\begin{aligned}
[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \ldots \\
[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \ldots \\
[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \ldots
\end{aligned}
$$

➜ Cada inteiro está em uma das três classes $[0]$, $[1]$ ou $[2]$.

Isto significa que uma classe de equivalência pode ter diferentes "nomes". Neste exemplo, a classe do 0 ($[0]$) pode ser "chamada" pela classe do 3 ($[3]$) ou pela classe do -6 ($[-6]$), e assim por diante.

Mas o que a classe $[0]$ ou $[3]$ ou $[-6]$ significa é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}.$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

As três classes de equivalência são:

1. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k,$ para algum inteiro $k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros divisíveis por 3.

2. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 1,$ para algum inteiro $k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros que deixam resto 1 quando divididos por 3.

3. $\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + 2,$ para algum inteiro $k\}$
   ➜ Conjunto dos inteiros que deixam resto 2 quando divididos por 3.

Propriedades das classes de equivalência

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e S uma classe de equivalência de R. Um *representante* da classe S é qualquer elemento a tal que $[a] = S$.

No exemplo anterior, temos que -6 é um representante da classe $[-6]$ que por sua vez gera o conjunto

$$\{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}$$

➜ Conjunto de todos os inteiros divisíveis por 3.

Classes de equivalência de uma relação

No exemplo 21 foi mostrado que dado um conjunto C de todos os circuitos lógicos com um número fixo n de entradas, a relação E é uma relação de equivalência.

A relação E foi definida como:

Para todos os circuitos $c_1 \in C$ e $c_2 \in C$

$$c_1 E c_2 \Leftrightarrow$$

c_1 tem a mesma tabela de entrada e saída que c_2.

Classes de equivalência de uma relação

$\boxed{\text{Exemplo 27}}$ Dado o exemplo 21 e considerando circuitos lógicos com duas entradas e uma saída:

(a) Descreva as classes de equivalência da relação E.

(b) Identifique quantas classes de equivalência distintas existem.

(c) Mostre circuitos que representam uma das classes.

Classes de equivalência de uma relação

Exemplo 27

Dado um circuito c_1, a classe de equivalência de c_1 é o conjunto de todos os circuitos com duas entradas e uma saída que têm a mesma tabela de entrada e saída de c_1.

Esquema de um circuito e uma possível tabela de entrada e saída:

	P	Q	*Saída*
$1^{\underline{a}}$ linha $\rightarrow$	1	1	0
$2^{\underline{a}}$ linha $\rightarrow$	1	0	0
$3^{\underline{a}}$ linha $\rightarrow$	0	1	0
$4^{\underline{a}}$ linha $\rightarrow$	0	0	1

Pelo princípio da multiplicação temos,

$$\underbrace{2}_{1^{\underline{a}}\text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{2^{\underline{a}}\text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{3^{\underline{a}}\text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{4^{\underline{a}}\text{ linha}} = 16$$

tabelas da verdade distintas.

Classes de equivalência de uma relação

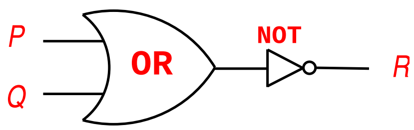
Exemplo 27

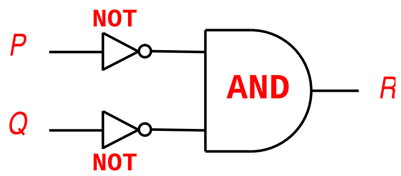
(a) Descreva as classes de equivalência da relação E.
Existem 16 classes de equivalência distintas, uma para cada tabela de entrada e saída distinta.

(b) Identifique quantas classes de equivalência distintas existem.
Existem infinitamente muitos circuitos para cada uma das tabelas.

(c) Mostre circuitos que representam uma das classes.
Para a tabela de entrada e saída abaixo, dois possíveis circuitos são:

P	Q	*Saída*
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1





Relação anti-simétrica

- Já foram vistas três propriedades de relações:
  1. Reflexividade
  2. Simetria
  3. Transitividade

- Definição: Seja R uma relação num conjunto A. R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A, \text{ se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

  ➜ Informalmente, uma relação é anti-simétrica se para cada aresta de "ida" não existe uma aresta de "volta".

- Tomando a negação dessa definição temos que uma relação R não é anti-simétrica sse,

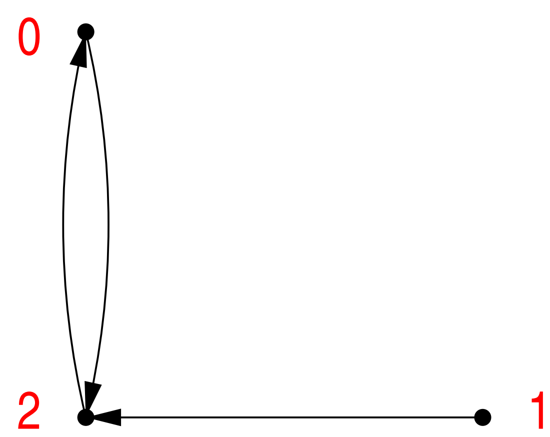
$$\exists a, b \in A | aRb \wedge bRa \wedge a \neq b.$$

Relação anti-simétrica

$\boxed{\text{Exemplo 28}}$ Seja R uma relação no conjunto $\{0, 1, 2\}$ definida como

$$R = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0)\}$$

A propriedade é anti-simétrica?



Anti-simétrica (**F**): R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A,\ \text{se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

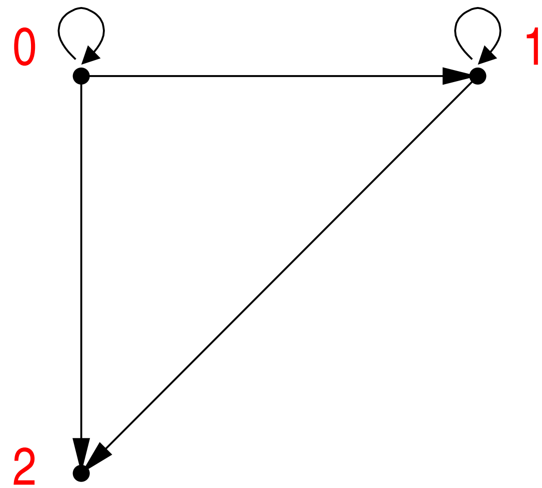
Como $0R2$ e $2R0$ e $0 \neq 2$, R não é anti-simétrica.

Relação anti-simétrica

$\boxed{\text{Exemplo 29}}$ Seja R uma relação no conjunto $\{0, 1, 2\}$ definida como

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$$

A propriedade é anti-simétrica?



Anti-simétrica (**V**): R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A,\ \text{se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

Como não existem arestas de ida e de volta para o mesmo par de nós, a relação é anti-simétrica.

Relação de ordem parcial

Definição: Seja R uma relação binária definida no conjunto A. R é uma relação de ordem parcial sse R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplos de relações de ordem parcial:

1. Relação "menor ou igual a" no conjunto dos números reais;
2. Relação "subconjunto" num conjunto de conjuntos.

Relação de ordem parcial

Exemplo 30 Seja D a relação divide em $\mathbb{Z}^+$ (inteiros positivos) definida como:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, a|b \Leftrightarrow b = k \cdot a, \text{ para algum inteiro } k.$$

- Reflexiva (**V**): D é reflexiva sse $\forall a \in \mathbb{Z}^+, a|a$.
  Suponha $a \in \mathbb{Z}^+$. Temos que $a = 1 \cdot a$ e assim $a|a$ pela definição da divisibilidade.

- Anti-simétrica (**V**): D é anti-simétrica sse $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b \wedge b|a$ então $a = b$.
  Suponha $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e aRb e bRa. Pela definição de R, $a|b$ e $b|a$. Pela definição de divide existem inteiros k_1 e k_2 tais que $b = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot b$. Temos que

  $$b = k_1 \cdot a = k_1 \cdot (k_2 \cdot b) = (k_1 \cdot k_2) \cdot b$$

  Ou seja, $k_1 \cdot k_2 = 1$. Temos que k_1 e k_2 são inteiros positivos. Mas o único produto de dois inteiros positivos que é igual 1 é $1 \cdot 1$. Assim, $k_1 = k_2 = 1$. Assim, $a = k_2 \cdot b = 1 \cdot b = b$.

- Transitividade (**V**): D é transitiva sse $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.
  Prova para o leitor.

Relação de ordem parcial

Exemplo 31 Seja $\leq$ a relação “menor ou igual a” em $\mathbb{R}$ definida como:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y).$$

Mostre que $\leq$ é uma relação em $\mathbb{R}$.

- Reflexiva (**V**): Para $\leq$ ser reflexiva significa que $x \leq x$ para todos números reais. Mas $x \leq x$ significa que $(x < x) \vee (x = x)$ e $x = x$ é sempre verdadeiro.

- Anti-simétrica (**V**): Para $\leq$ ser anti-simétrica significa que para todos números reais x e y, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$. Isto é consequência imediata da definição de $\leq$ e a propriedade de tricotomia que diz que dados quaisquer números reais x e y exatamente uma das afirmações é verdadeira: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$.

- Transitividade (**V**): Para $\leq$ ser transitiva significa que para todos os reais x, y e z, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. Isto é verdade pela definição de $\leq$ e pela propriedade transitiva da ordem dos números reais que diz que dados quaisquer números reais x, y e z, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

Ordem lexicográfica

- Seja Σ um conjunto com uma relação de ordem parcial.
- Pode-se, então, definir uma ordem lexicográfica ou ordem de "dicionário" no conjunto $\Sigma^\star$.
- Seja R uma relação em $\Sigma^\star$. Para quaisquer inteiros positivos m e n, e $a_1a_2\ldots a_m$ e $b_1b_2\ldots b_n$ em $\Sigma^\star$, temos:
  1. Se $m \leq n$ e $a_i = b_i$ para todos $i = 1, 2, \ldots, m$, então
  $$a_1a_2\ldots a_m \preceq b_1b_2\ldots b_n.$$
  2. Para algum inteiro k, $k \leq m$, $k \leq n$, e $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para todos $i = 1, 2, \ldots, k-1$, e a_kRb_k mas $a_k \neq b_k$, então
  $$a_1a_2\ldots a_m \preceq b_1b_2\ldots b_n.$$
  3. Se ϵ é o string nulo e s é um string em $\Sigma^\star$, então $\epsilon \preceq s$.

  O símbolo $\preceq$ é usado para referenciar uma relação de ordem parcial genérica e é lido como "menor ou igual a".

Ordem lexicográfica

$\boxed{\text{Exemplo 32}}$ Seja $\Sigma = \{\perp, \top\}$ e R a seguinte relação de ordem parcial em Σ:

$$R = \{(\perp, \perp), (\perp, \top), (\top, \top)\}.$$

Diga se os seguintes strings definem uma ordem lexicográfica em $\Sigma^\star$:

(a) $\top\perp\top\perp\perp\top\top \preceq \top\perp\top\perp\top$?
Sim, caso 2.

(b) $\perp\perp\top\perp\top\top\top \preceq \perp\perp\top\perp\perp\top\top$?
Não, já que $a_5 \not\preceq b_5$.

(c) $\top\top\perp\perp \preceq \top\top\perp\perp\perp$?
Sim, caso 1.

(d) $\epsilon \preceq \perp\perp\top$?
Sim, caso 3.

Diagrama de Hasse

$\boxed{\text{Exemplo 33}}$ Seja $A = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ e considere a relação D "divide" no conjunto como:

$$\forall a, b \in A, a|b \Leftrightarrow b = a \cdot k, \text{ para algum inteiro } k.$$

O grafo dirigido da relação D é:

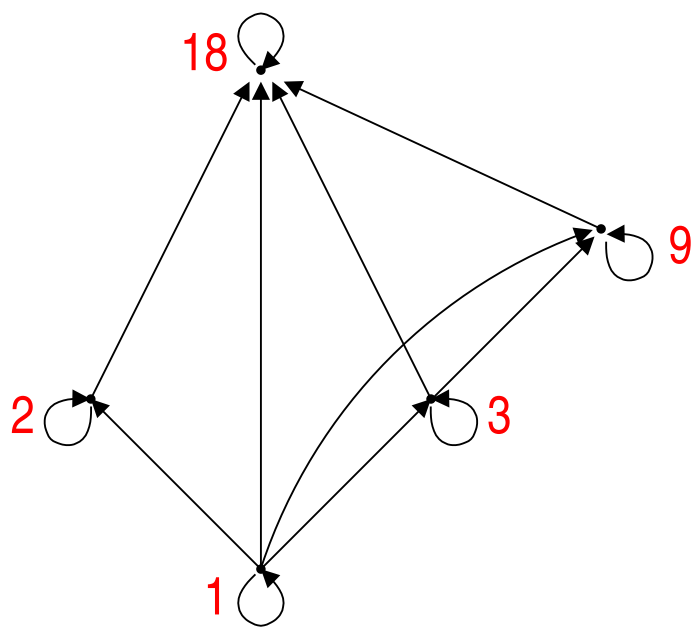
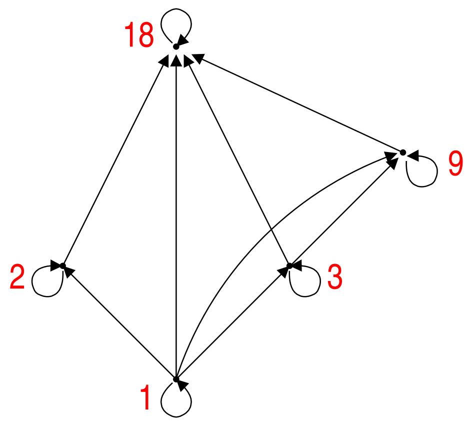


Diagrama de Hasse



Note que:

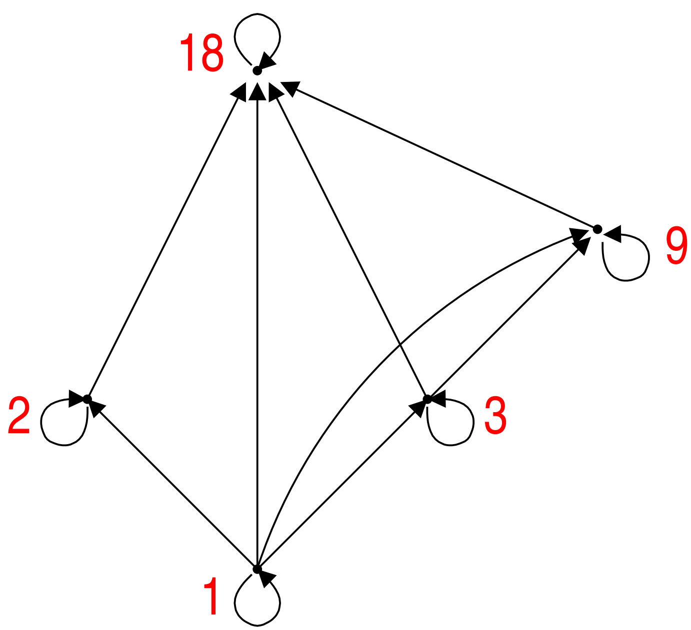
– Existe um laço (“loop”) em cada vértice;
– Todas as arestas apontam para a mesma direção, ou seja, para cima;
– Toda vez que há uma aresta de um vértice para um segundo e de um segundo para um terceiro, então há uma aresta do primeiro vértice para o terceiro vértice.

➜ É possível associar um grafo mais simples com uma relação de ordem parcial num conjunto finito chamado Diagrama de Hasse.

Algoritmo para obter o Diagrama de Hasse

Elimine:

1. Os laços em todos os vértices;
2. Todas as arestas que existem por causa da propriedade de transitividade;
3. A direção em todas as arestas.



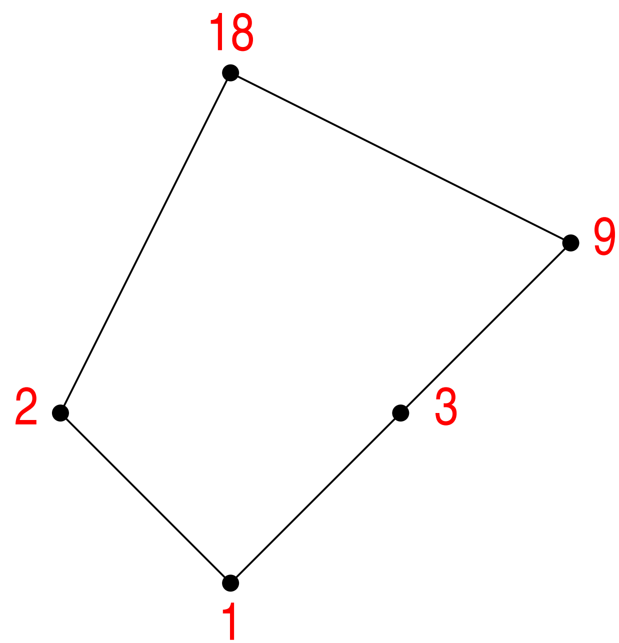
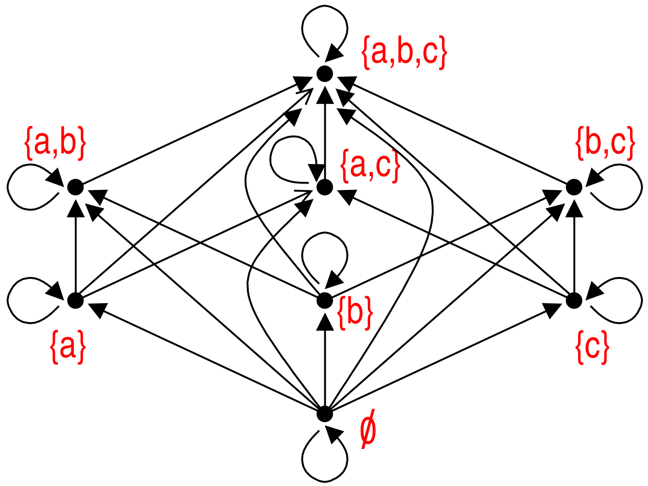


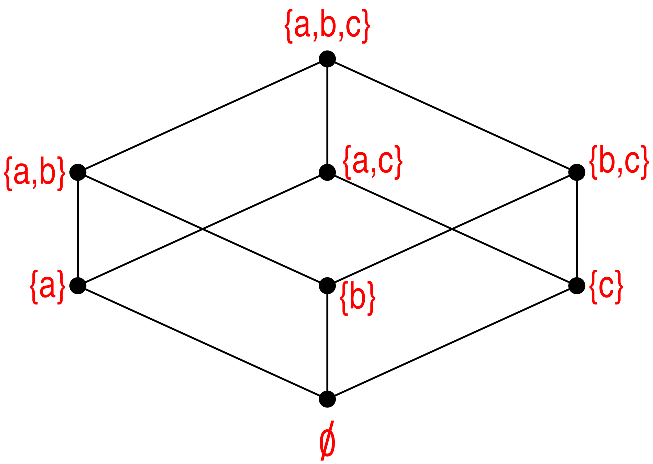
Diagrama de Hasse

$\boxed{\text{Exemplo 34}}$ Considere a relação subconjunto, $\subseteq$, no conjunto potência $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Para todos os conjuntos U e V em $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$,

$$U \subseteq V \Leftrightarrow \forall x, \text{ se } x \in U \text{ então } x \in V.$$

Construa o Diagrama de Hasse dessa relação.





Grafo original do Diagrama de Hasse

Para obter o grafo original a partir do Diagrama de Hasse basta reverter os passos do algoritmo anterior.