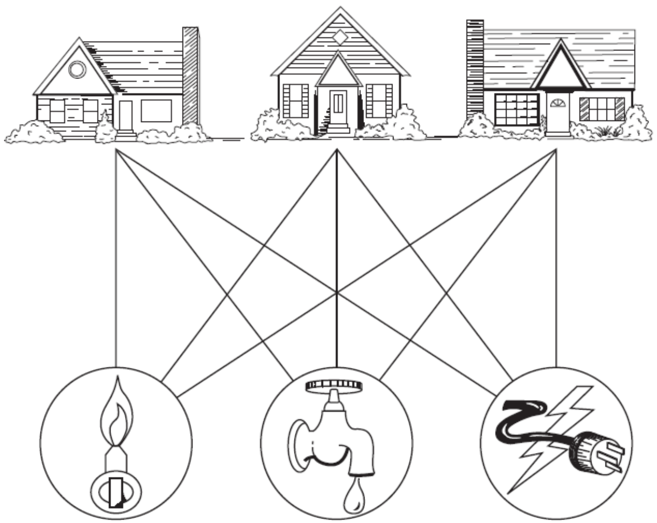
Grafo planar

Considere o problema de conectar três casas a cada uma de três infraestruturas (gás, água, energia) como mostrado na figura abaixo. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem?



Este problema pode ser modelado usando o grafo bipartido completo $K_{3,3}$, refraseando a pergunta original como: o grafo $K_{3,3}$ pode ser desenhado no plano sem que duas arestas se cruzem?

Grafo planar: Definição

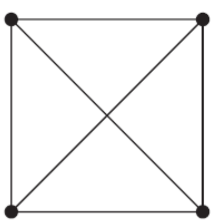
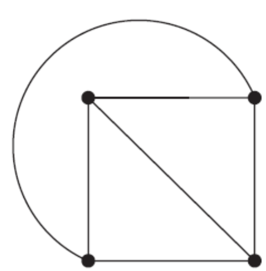
Um grafo é planar se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando.

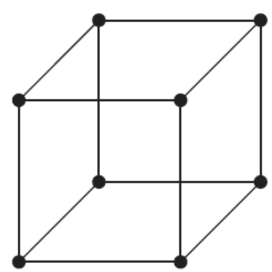
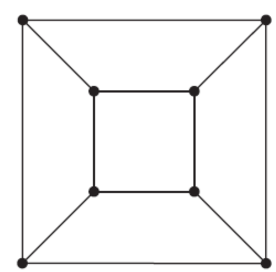
Arestas se cruzam (cortam) se há interseção das linhas/arcos que as representam em um ponto que não seja um vértice.

– Tal desenho é chamado representação planar do grafo.

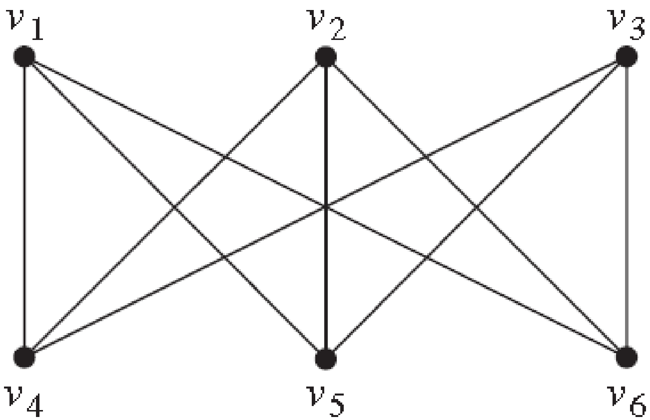
Se o desenho de um grafo tiver cruzamentos, o grafo pode ainda ser planar se puder ser desenhado sem cruzamentos.

Exemplos de grafos desenhados com e sem cruzamentos:

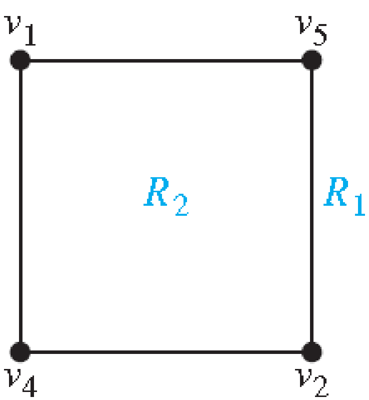
K_4:  

Q_3:  

Grafo $K_{3,3}$ não é planar



Em qualquer representação planar de $K_{3,3}$, os vértices v_1 e v_2 devem ser conectados a v_4 e v_5.

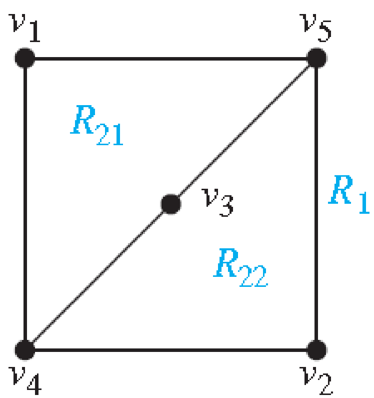


Estas quatro arestas formam uma “curva fechada” que divide o plano em duas regiões, R_1 e R_2, como mostrado na figura ao lado.

O vértice v_3 pode ser desenhado em R_1 ou R_2.

Suponha que v_3 esteja em R_2, dentro da curva fechada (raciocínio similar pode ser feito para R_1).

Grafo $K_{3,3}$ não é planar



As arestas entre v_3 e v_4 e entre v_3 e v5 dividem R_2 em duas subregiões R_{21} e R_{22}, como mostrado na figura ao lado.

Assim, podemos ter v_6 em R_1, R_{21} ou R_{21}.

Em cada um desses três casos, sempre há um cruzamento quando temos v_6 nos seguintes cenários:

Região	Conectado a
R_1	v_3
R_{21}	v_2
R_{22}	v_1

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a outros grafos, como o $K_{5,5}$, para mostrar que esses grafos não são planares.

Aplicações de grafos planares

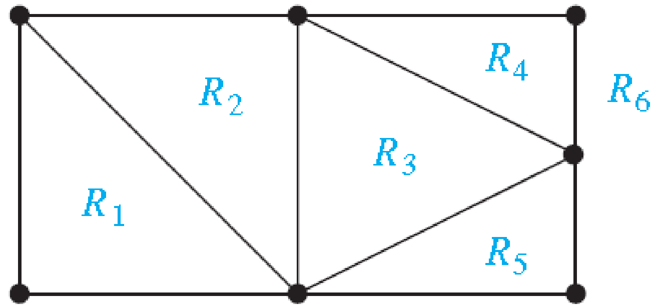
Estão por toda parte como, por exemplo, no projeto de:

- circuitos integrados (problema crítico que tem levado a novos avanços na área)
- circuitos impressos (placas onde componentes eletrônicos são montados)
- rodovias conectando cidades
- linhas de transmissão de energia elétrica
- linha de produção em uma indústria

Fórmula de Euler

Representação planar de um grafo divide o plano em regiões (uma é ilimitada).

A representação planar do grafo abaixo divide o plano em seis regiões.



Euler mostrou que a representação planar do grafo divide o plano no mesmo número de regiões:

– Chegou a esse resultado ao encontrar uma relação entre o número de regiões, número de vértices e número de arestas de um grafo planar.

Teorema. Seja G um grafo planar simples com e arestas e v vértices. Seja r o número de regiões na representação planar de G. Temos que

$$r = e - v + 2.$$

Ideia da prova

Construir uma sequência de subgrafos $G_1, G_2, \ldots, G_e = G$, sucessivamente acrescentado uma aresta em cada passo.

Isto é feito usando o seguinte princípio indutivo:

– Escolha arbitrariamente uma aresta de G para obter G_1
– Obtenha G_n a partir de G_{n-1} ao acrescentar arbitrariamente uma aresta que é incidente a um vértice de G_{n-1} que não está presente ainda.

Esta construção é possível porque G é conexo e G é obtido depois de e arestas serem acrescentadas. Seja r_n, e_n e v_n o número de regiões, arestas e vértices, respectivamente, da representação planar de G_n induzida pela representação planar de G.

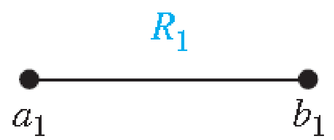
Prova por indução matemática

Construir uma sequência de subgrafos $G_1, G_2, \ldots, G_e = G$, sucessivamente acrescentado uma aresta em cada passo.

Passo base: A relação

$$r_1 = e_1 - v_1 + 2$$

é verdadeira para G_1, já que $e_1 = 1$, $v_1 = 2$ e $r_1 = 1$, como mostrado abaixo.

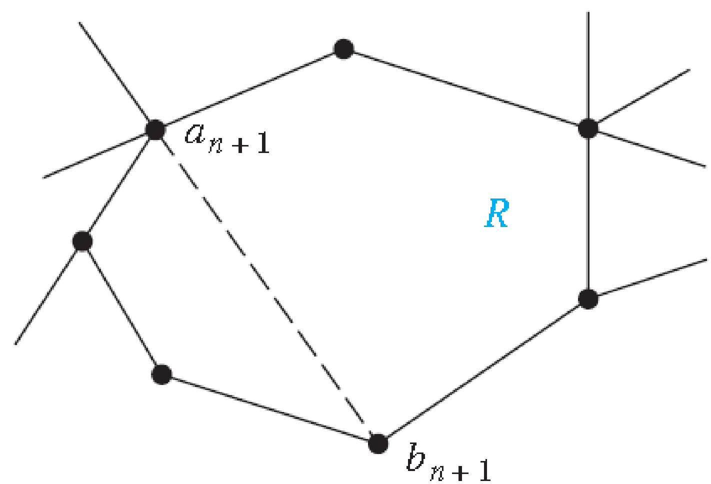


Prova por indução matemática

Passo indutivo. Vamos assumir que $r_k = e_k - v_k + 2$. Seja $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ a aresta acrescentada a G_k para obter G_{k+1}. Existem duas possibilidades a considerar:

1. Ambos os vértices a_{k+1} e b_{k+1} já estão em G_k.

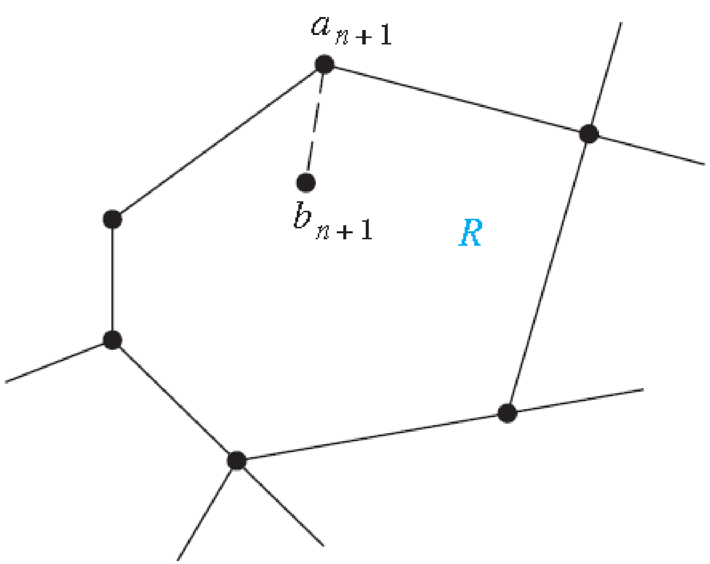
- Esses dois vértices devem estar na fronteira de uma região comum R.
- Caso contrário não seria possível acrescentar a aresta $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ a G_k sem haver um cruzamento (note que G_{k+1} é planar).
- A adição desta nova aresta divide R em duas regiões.
- Consequentemente, neste caso, $r_{k+1} = r_k + 1$, $e_{k+1} = e_k + 1$, e $v_{k+1} = v_k$.
- Assim, cada lado da fórmula de Euler é incrementado por um, continuando válida.
- Em outras palavras, $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$. Este caso é ilustrado na figura ao lado.



Prova por indução matemática

2. No segundo caso, um dois vértices da nova aresta não está ainda em G_k.

- Suponha que a_{k+1} está em G_k, mas b_{k+1} não.
- Adicionar esta nova aresta não gera novas regiões, já que b_{k+1} deve estar em uma região que tem a_{k+1} em seu limite.
- Consequentemente, $r_{k+1} = rk$, $e_{k+1} = ek + 1$ e $v_{k+1} = vk + 1$.
- A fórmula continua válida já que cada lado permanece o mesmo.
- Em outras palavras, $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$. Este caso é ilustrado na figura ao lado.



Isto completa o passo indutivo. Assim,

$$r_n = e_n - v_n + 2$$

para todos n.

Exemplo da fórmula de Euler

Seja um grafo simples conexo e planar com 20 vértices, cada um com grau 3. Em quantas regiões o plano é dividido em uma representação planar desse grafo?

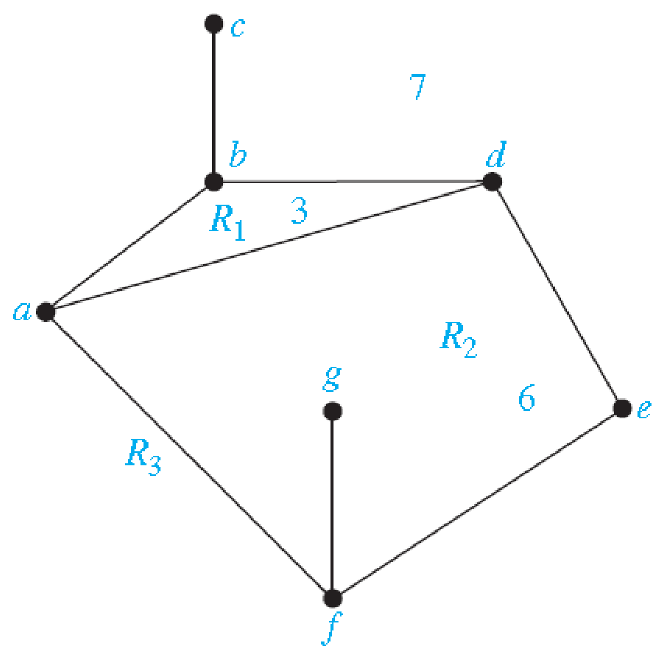
O grau total do grafo é $20 \times 3 = 60$. Isso significa que o grafo tem 30 arestas. Assim, o número de regiões é:

$$\begin{aligned} r &= e - v + 2 \\ &= 30 - 20 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Inequações a partir da Fórmula de Euler
Corolário 1

Se G é um grafo simples conexo e planar com e arestas e v vértices, sendo $v \geq 3$, então $e \leq 3v - 6$.

Grau de uma região (deg(R)): número de arestas no limite de uma região. Toda aresta que tem um vértice de grau 1 contribui com dois para o grau da região.



Inequações a partir da Fórmula de Euler
Corolário 1

Prova: um grafo simples conexo e planar divide o plano em r regiões. Como temos pelo menos três vértices, o grau de cada região é pelo menos três. Note que a soma dos graus de todas as regiões é exatamente o dobro do número de arestas no grafo, já que cada aresta ocorre duas vezes no limite de cada região (em duas regiões diferentes, or duas vezes na mesma região). Assim, temos que

$$2e = \sum_{\forall R} \text{deg}(R) \geq 3r.$$

Assim, $\frac{2}{3}e \geq r$, ou $r \leq \frac{2}{3}e$.

Usando $r = e - v + 2$, temos

$$\begin{aligned} e - v + 2 &\leq \frac{2}{3}e \\ \frac{1}{3}e &\leq v - 2 \\ e &\leq 3v - 6 \end{aligned}$$

Exemplo do Corolário 1

Mostre que K_5 não é um grafo planar.

O grafo K_5 possui 5 vértices e 10 arestas. A inequação $e \leq 3v - 6$ não é satisfeita já que $e = 10$ e $3v - 6 = 9$, o que mostra que o grafo não é planar.

No entanto, se a inequação do Corolário 1 for satisfeita não significa que o grafo é planar. Ou seja, o Corolário 1 pode ser usado para mostrar que o grafo não é planar, mas não para mostrar que é planar.

Por exemplo, sabemos que $K_{3,3}$ não é planar. Esse grafo tem $v = 6$ e $e = 9$. Temos que

$$\begin{aligned} e &\leq 3v - 6 \\ 9 &\leq 3 \times 6 - 6 \\ 9 &\leq 12 \end{aligned}$$

e a inequação é verdadeira, mas de fato o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Inequações a partir da Fórmula de Euler
Corolário 2

Se G é um grafo simples conexo e planar, então G tem um vértice de grau menor ou igual a 5.

Prova:
Se G tem um ou dois vértices, a afirmação é verdadeira.

Se G tem pelo menos três vértices, pelo Corolário 1, sabemos que $e \leq 3v - 6$. Multiplicando por 2 cada lado da inequação, temos $2e \leq 6v - 12$. Se o grau de cada vértice fosse pelo menos 6, o grau total do grafo seria pelo menos $6v$. Representando o grau total do grafo com a quantidade de arestas temos que $2e \geq 6v$. Mas isto contradiz a inequação $2e \leq 6v - 12$. Assim, deve haver pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

Inequações a partir da Fórmula de Euler
Corolário 3

Se G é um grafo simples conexo e planar com e arestas e v vértices, sendo que $v \geq 3$ e nenhum circuito de comprimento três, então

$$e \leq 2v - 4.$$

De fato, o grafo $K_{3,3}$ tem $v = 6$, $e = 9$ e nenhum circuito de comprimento três. Temos que

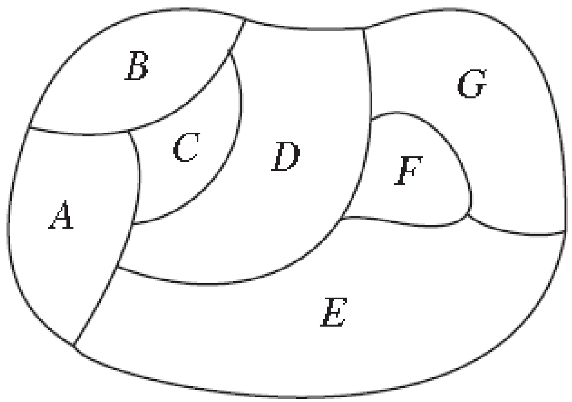
$$\begin{aligned} e &\leq 2v - 4 \\ 9 &\leq 2 \times 5 - 6 \\ 9 &\leq 4 \end{aligned}$$

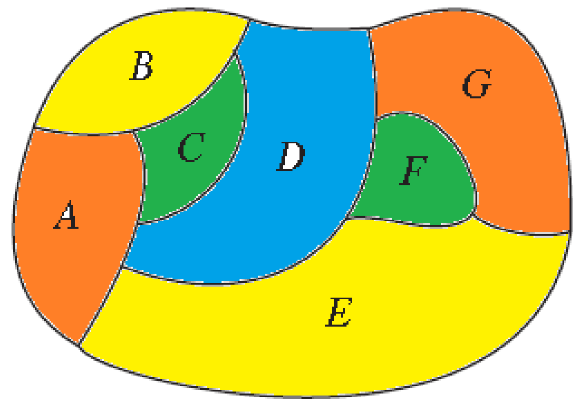
e a inequação não é verdadeira, e de fato o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Coloração de grafos

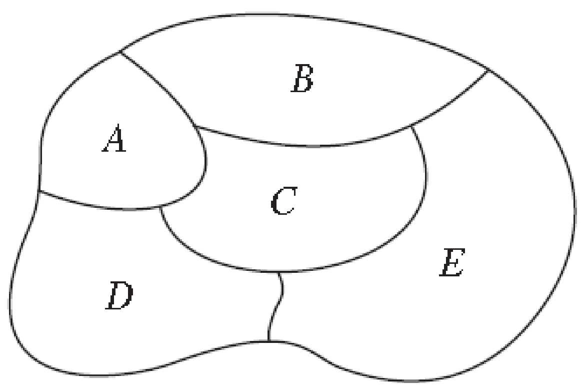
Considere o problema de determinar o menor número de cores que podem ser usadas para colorir um mapa tal que regiões adjacentes nunca têm a mesma cor.

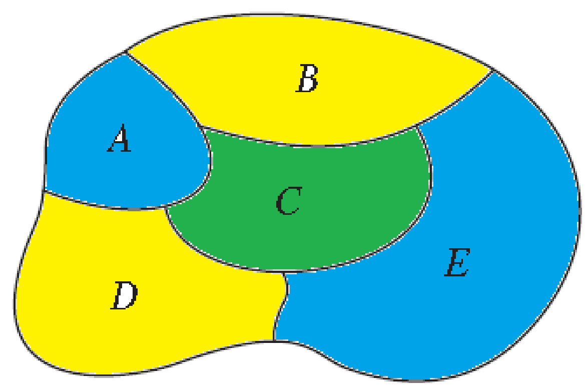
O mapa ao lado pode ser colorido com quatro cores, mas não com três.





O mapa ao lado pode ser colorido com três cores, mas não com duas.





Coloração de grafos

Cada mapa no plano pode ser representado por um grafo.

Algoritmo:

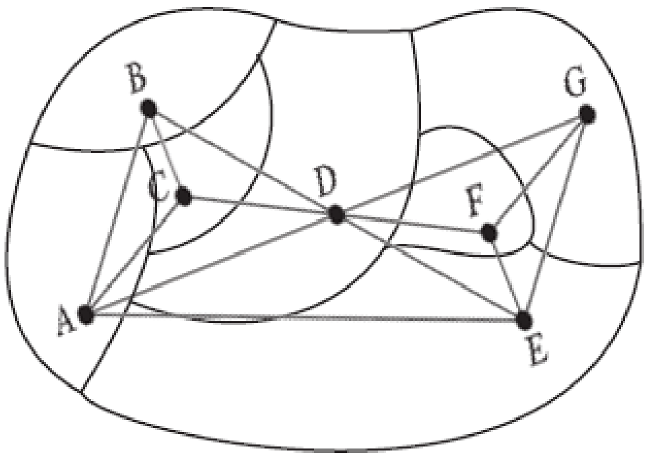
1. Represente cada região do mapa por um vértice.
2. Conecte uma aresta entre dois vértices se as regiões são adjacentes, i.e., há uma fronteira comum entre as regiões (duas regiões que se tocam em um único ponto não são consideradas adjacentes).

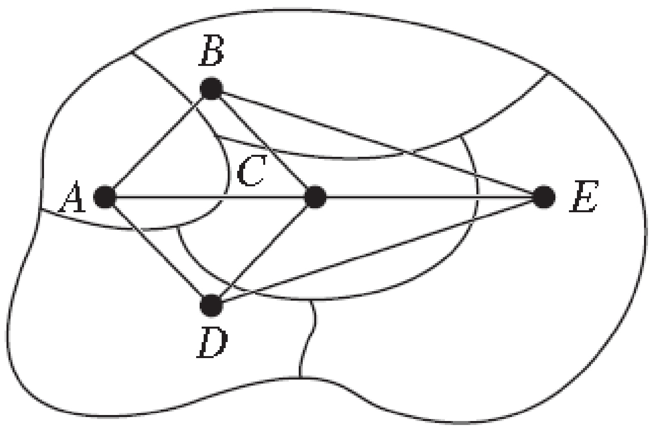
O grafo resultante é chamado de grafo dual do mapa.

– Qualquer mapa no plano tem um grafo dual planar.

O problema de colorir as regiões de um mapa é equivalente ao problema de colorir os vértices do grafo dual tal que vértices adjacentes nesse grafo não têm a mesma cor.

Exemplos de grafos duais





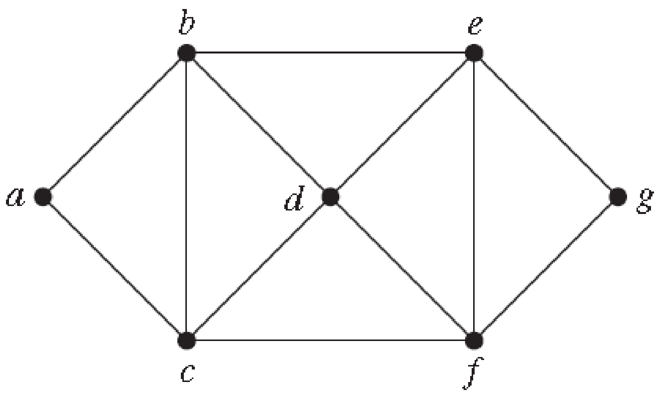
Coloração de grafos

Definição: Uma coloração de um grafo simples é o assinalamento de uma cor a cada vértice do grafo tal que dois vértices adjacentes não têm a mesma cor.

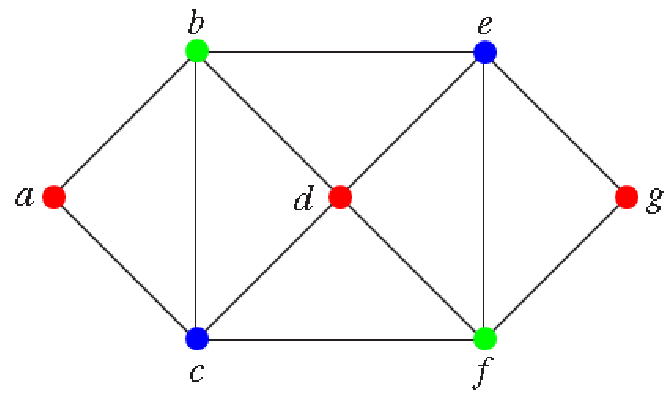
Definição: O número cromático de um grafo é o menor número de cores necessárias à coloração deste grafo. O número cromático de um grafo G é denotado por $\chi(G)$.

Teorema: O número cromático de um grafo planar é no máximo quatro.

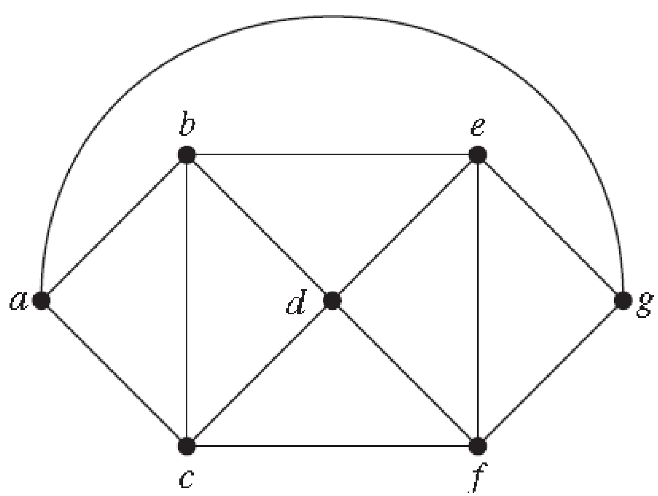
Exemplos de coloração de grafos planares



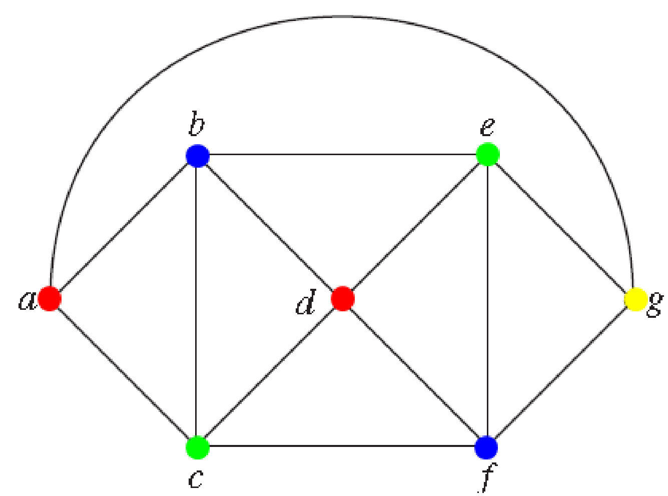
G_1



Coloração de G_1, $\chi(G_1) = 3$



G_2



Coloração de G_2, $\chi(G_2) = 4$

Exemplos de coloração de grafos

Qual é o número cromático de K_n, $n \geq 5$? (K_n é não planar)

– $\chi(K_n) = n$.

Qual é o número cromático de $K_{m,n}$, $m, n \geq 1$? ($K_{m,n}$ é não planar)

– $\chi(K_{m,n}) = 2$.

Qual é o número cromático de C_n, $n \geq 3$? (C_n é planar)

– n par, $\chi(C_n) = 2$.
– n ímpar, $\chi(C_n) = 3$.

Coloração crítica

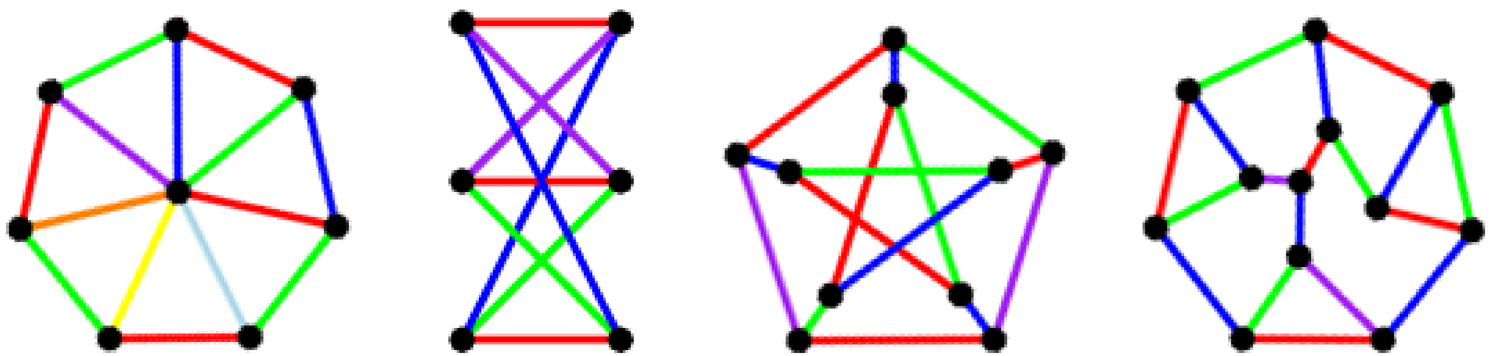
Um grafo conexo é chamado cromaticamente k-crítico (*chromatically k-critical*) se o número cromático de G é k, mas para cada aresta de G, o número cromático do grafo obtido pela eliminação dessa aresta de G passa a ser $k - 1$.

Exemplo: C_n é cromaticamente 3-crítico sempre que n é um inteiro positivo ímpar, $n \geq 3$.

Coloração de arestas

Uma coloração de arestas de um grafo é um assinalamento de cores às arestas tal que arestas incidentes a um vértice em comum possuem cores diferentes.

O número cromático de aresta de um grafo é o menor número de cores que podem ser usadas numa coloração de arestas do grafo e é representado por $\chi'(G)$.



Mais conceitos relacionados a grafos

- **Clustering coefficient** $C(G)$ of a simple graph G is the probability that if u and v are neighbors and v and w are neighbors, then u and w are neighbors, where u, v, and w are distinct vertices of G.

- A **dominating set** of vertices in a simple graph is a set of vertices such that every other vertex is adjacent to at least one vertex of this set. A dominating set with the least number of vertices is called a **minimum dominating set**.

- A **clique** in a simple undirected graph is a complete subgraph that is not contained in any larger complete subgraph.

- The **radius** of a graph is the minimum over all vertices v of the maximum distance from v to another vertex. The **diameter** of a graph is the maximum distance between two distinct vertices.

- A set of vertices in a graph is called **independent** if no two vertices in the set are adjacent. The **independence number** of a graph is the maximum number of vertices in an independent set of vertices for the graph.