

**LISTA DE EXERCÍCIOS 1: SOLUÇÕES**  
**FUNDAMENTOS DA LÓGICA – LÓGICA PROPOSICIONAL**

1. Construa a tabela da verdade para a seguinte proposição:  $E = (p \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg(q \wedge \neg r)$

Resposta:

$p$	$q$	$r$	$(p \vee (\neg p \vee q))$	$\neg(q \wedge \neg r)$	$E$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

2. Mostre se as expressões  $E_1$  e  $E_2$  são equivalentes logicamente:

$$E_1 = (s \rightarrow (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$$

$$E_2 = (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee \neg(p \vee s)$$

Resposta:

$p$	$q$	$r$	$s$	$(s \rightarrow (p \wedge \neg r))$	$((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$	$E_1$	$(p \wedge q \wedge \neg r \wedge s)$	$\neg(p \vee s)$	$E_2$
V	V	V	V	F	V	F	F	F	F
V	V	V	F	V	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V

Como as duas tabelas da verdade não são idênticas, as expressões  $E_1$  e  $E_2$  não são equivalentes logicamente.

3. Faça a simplificação lógica da seguinte expressão usando apenas as leis da lógica:

$$(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$$

**Resposta:**

$(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$	De Morgan sobre $\neg(\neg p \vee q)$ .
$(p \wedge (p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q)$	Associatividade sobre $p \wedge (p \wedge \neg q)$ .
$((p \wedge p) \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$	Idempotência sobre $p \wedge p$ .
$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$	Distributividade sobre a expressão.
$p \wedge (\neg q \vee q)$	Negação sobre $\neg q \vee q$ .
$p \wedge t$	Identidade com a tautologia $t$ .
$p$	

4. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não usando as formas válidas de argumentos. Em cada passo, identifique a razão para se obter a conclusão:

- (a)  $\neg p \rightarrow r \wedge \neg s$
- (b)  $t \rightarrow s$
- (c)  $u \rightarrow \neg p$
- (d)  $\neg w$
- (e)  $u \vee w$
- (f)  $\therefore \neg t \vee w$

**Resposta:**

Deduções:

- |  |                          |
|--|--------------------------|
| (i) $u \vee w$                             | (e)                      |
| $\neg w$                                   | (d)                      |
| $\therefore u$                             | Silogismo Disjuntivo     |
|  |                          |
| (ii) $u \rightarrow \neg p$                | (c)                      |
| $u$  | (i)                      |
| $\therefore \neg p$                        | Modus Ponens             |
|  |                          |
| (iii) $\neg p \rightarrow r \wedge \neg s$ | (a)                      |
| $\neg p$                                   | (ii)                     |
| $\therefore r \wedge \neg s$               | Modus Ponens             |
|  |                          |
| (iv) $r \wedge \neg s$                     | (iii)                    |
| $\therefore \neg s$                        | Simplificação Conjuntiva |
|  |                          |
| (v) $t \rightarrow s$                      | (b)                      |
| $\neg s$                                   | (iv)                     |
| $\therefore \neg t$                        | Modus Tollens            |
|  |                          |
| (vi) $\neg t$                              | (v)                      |
| $\therefore \neg t \vee w$                 | Adição Disjuntiva        |

A forma de argumento é válida.

5. Este exercício é “praticamente idêntico” ao anterior exceto que a conclusão é um “pouco diferente”. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não usando as formas válidas de argumentos. Em cada passo, identifique a razão para se obter a conclusão:

- (a)  $\sim p \rightarrow r \wedge \sim s$

- (b)  $t \rightarrow s$
- (c)  $u \rightarrow \sim s$
- (d)  $\sim w$
- (e)  $u \vee w$
- (f)  $\therefore \sim t \wedge w$

**Resposta:**

Deduções:

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>(i) <math>u \vee v</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>\sim w</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>\therefore u</math></li> </ul>               | <ul style="list-style-type: none"> <li>(e)</li> <li>(d)</li> <li>Silogismo Disjuntivo</li> </ul> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>(ii) <math>u \rightarrow \sim s</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>u</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>\therefore \sim s</math></li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>(c)</li> <li>(i)</li> <li>Modus Ponens</li> </ul>         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>(iii) <math>t \rightarrow s</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>\sim s</math></li> <li style="padding-left: 2em;"><math>\therefore \sim t</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>(b)</li> <li>(ii)</li> <li>Modus Tollens</li> </ul>       |

A premissa (a) possui as variáveis  $p$  e  $r$  que não estão presentes nas outras premissas. Assim, nada pode ser dito. A conclusão do argumento (f) possui dois termos:  $\sim t$ , que sabe-se ser verdadeiro (iii), e  $w$ , que nega a premissa (d). Assim, a conclusão está errada e a forma de argumento é inválida.

Essa conclusão também pode ser vista usando a tabela da verdade abaixo. Existem três linhas críticas: 14, 30 e 46, que possuem conclusão falsa. Isso demonstra que a forma de argumento é inválida.

	$p$	$r$	$s$	$t$	$u$	$w$	$\sim p \rightarrow r \wedge \sim s$	$t \rightarrow s$	$u \rightarrow \sim s$	$\sim w$	$u \vee w$	$\sim t \wedge w$
1.	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
2.	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	F
3.	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
4.	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
5.	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
6.	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F
7.	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
8.	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F
9.	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F
10.	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F
11.	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F
12.	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
13.	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
→ 14.	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
15.	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
16.	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
17.	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
18.	V	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V	F
19.	V	F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
20.	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
21.	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
22.	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F
23.	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
24.	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F
25.	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F
26.	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F
27.	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F
28.	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
29.	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
→ 30.	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
31.	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
32.	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
33.	F	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V	F
34.	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F
35.	F	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F
36.	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
37.	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V
38.	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F
39.	F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
40.	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	F	F
41.	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F
42.	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F
43.	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F
44.	F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
45.	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
→ 46.	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
47.	F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
48.	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
49.	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V	F
50.	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F
51.	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F
52.	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
53.	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V
54.	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F
55.	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
56.	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F	F
57.	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	F
58.	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F
59.	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F
60.	F	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F
61.	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F	V	V
62.	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F
63.	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V
64.	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F

6. O famoso detetive Percule Hoirot foi chamado para resolver um assassinato misterioso. Ele determinou os seguintes fatos:

- (a) Lord Charles, o homem assassinado, foi morto com uma pancada na cabeça com um castiçal.
- (b) Ou Lady Camila ou a empregada Sara estavam na sala de jantar no momento do assassinato.

- (c) Se o cozinheiro estava na cozinha no momento do assassinato, então o açougueiro matou Lord Charles com uma dose fatal de arsênico.
- (d) Se Lady Camila estava na sala de jantar no momento do assassinato, então o motorista matou Lord Charles.
- (e) Se o cozinheiro não estava na cozinha no momento do assassinato, então Sara não estava na sala de jantar quando o assassinato ocorreu.
- (f) Se Sara estava na sala de jantar no momento do assassinato, então o ajudante pessoal de Lord Charles o matou.

É possível para o detetive Percule Hoirot deduzir quem matou Lorde Charles? Se sim, quem é o assassino?

**Resposta:**

Sejam os seguintes argumentos:

$p$  = Lord Charles foi morto com uma pancada na cabeça com um castiçal.

$q$  = Lady Camila estava na sala de jantar no momento do assassinato.

$r$  = Sara estava na sala de jantar no momento do assassinato.

$s$  = Cozinheiro estava na cozinha no momento do assassinato.

$t$  = Açougueiro matou Lord Charles com uma dose fatal de arsênico.

$u$  = Motorista matou Lord Charles.

$v$  = Ajudante pessoal de Lord Charles o matou.

Tradução dos fatos para as proposições:

- (a)  $p$
- (b)  $q \vee r$
- (c)  $s \rightarrow t$
- (d)  $q \rightarrow u$
- (e)  $\neg s \rightarrow \neg r$
- (f)  $r \rightarrow v$

Deduções:

- (i) Suponha que  $s$  seja V, i.e., o cozinheiro estava na cozinha no momento do assassinato.

$s \rightarrow t$	(c)
$s$	(Suposição)
$\therefore t$	Modus Ponens

- (ii) No entanto,  $t \rightarrow$  “contradição”, já que Lord Charles não foi morto com arsênico e sim por uma pancada na cabeça (a). Logo, a suposição que o cozinheiro estava na cozinha é falsa. Assim, temos  $\neg s$ .

$s \rightarrow t$	(c)
$t \rightarrow$ “contradição”	(i)
$\therefore \neg s$	Silogismo Hipotético e Contradição

- (iii)  $\neg s \rightarrow \neg r$  (e)
- $\neg s$  (ii)
- $\therefore \neg r$  Modus Ponens

- (iv)  $q \vee r$  (b)
- $\neg r$  (iii)
- $\therefore q$  Silogismo Disjuntivo

- (v)  $q \rightarrow u$  (d)
- $q$  (iv)
- $\therefore u$  Modus Ponens

De onde se conclui que o motorista matou Lord Charles.

7. Construa a tabela da verdade para a seguinte proposição:  $E = (p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

**Resposta:**

$p$	$q$	$(p \oplus q)$	$(p \oplus \neg q)$	$E$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

8. Construa a tabela da verdade para a seguinte proposição:  $E = (\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$

**Resposta:**

$p$	$q$	$r$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow \neg r)$	$E$
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

9. Seja a tabela da verdade do operador  $\odot$ :

$p$	$q$	$p \odot q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- (a) O operador  $\odot$  segue a lei da associatividade com o operador  $\wedge$ , i.e.,  $(x \odot y) \wedge z \stackrel{?}{\equiv} x \odot (y \wedge z)$ .

**Resposta:**

$x$	$y$	$z$	$(x \odot y) \wedge z$	$x \odot (y \wedge z)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Como as duas colunas da direita não são idênticas, o operador  $\odot$  não segue a lei da associatividade com o operador  $\wedge$ .

- (b) O operador  $\odot$  segue a lei da distributividade com o operador  $\wedge$ , i.e.,  $x \odot (y \wedge z) \stackrel{?}{\equiv} (x \odot y) \wedge (x \odot z)$ .

**Resposta:**

$x$	$y$	$z$	$x \odot (y \wedge z)$	$(x \odot y) \wedge (x \odot z)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V

Como as duas colunas da direita não são idênticas, o operador  $\odot$  não segue a lei da distributividade com o operador  $\wedge$ .

10. Mostre a equivalência lógica da seguinte proposição usando apenas as leis da lógica:

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

**Resposta:**

$$\begin{aligned}
(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r \\
(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) &\equiv \\
\neg p \vee \neg q \vee r &\equiv \\
(\neg p \vee \neg q) \vee r &\equiv \\
\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r &\equiv \\
(p \wedge q) \rightarrow r &\equiv
\end{aligned}$$

11. Mostre se os seguintes requisitos são consistentes ou não. Caso sejam, para que valores esses requisitos são consistentes.

*Se o sistema de arquivos não está travado, então novas mensagens serão enfileiradas. Se o sistema de arquivos não está travado, então o sistema está funcionando normalmente e vice-versa. Se novas mensagens não são enfileiradas, então elas serão enviadas para o buffer de mensagens. Se o sistema de arquivos não está travado, então novas mensagens serão enviadas para o buffer de mensagens. Novas mensagens não serão enviadas para o buffer de mensagens.*

**Resposta:**

Sejam os seguintes argumentos:

$p$  = O sistema de arquivos não está travado.

$q$  = Novas mensagens serão enfileiradas.

$r$  = O sistema está funcionando normalmente.

$s$  = Mensagens serão enviadas para o buffer de mensagens.

Tradução dos fatos para as proposições:

(a)  $p \rightarrow q$

(b)  $p \rightarrow r$

(c)  $r \rightarrow p$

(d)  $\neg q \rightarrow s$

(e)  $p \rightarrow s$

(f)  $\neg s$

Deduções:

(i)  $\neg q \rightarrow s$

(d)

- $\neg s$  (f)  
 $\therefore q$  Modus Tollens
- (ii)  $p \rightarrow s$  (e)  
 $\neg s$  (f)  
 $\therefore \neg p$  Modus Tollens
- (iii)  $r \rightarrow p$  (c)  
 $\neg p$  (ii)  
 $\therefore \neg r$  Modus Tollens
- (iv)  $p \rightarrow r$  (b)  
 $\neg r$  (iii)  
 $\therefore \neg p$  Modus Tollens

Pelas deduções acima temos que os requisitos são consistentes para os valores:

- $\neg p = V$ : O sistema de arquivos está travado.
- $q = V$ : Novas mensagens serão enfileiradas.
- $\neg r = V$ : O sistema não está funcionando normalmente.
- $\neg s = V$ : Mensagens não serão enviadas para o buffer de mensagens.

12. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não:

- $p \wedge \neg q \rightarrow r$   
 $p \vee q$   
 $q \rightarrow p$   
 $\therefore r$

**Resposta:**

		<b>Variáveis</b>			<b>Aux</b>	<b>Premissas</b>			<b>Conclusão</b>
		$p$	$q$	$r$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	$p \vee q$	$q \rightarrow p$	$r$
<b>1.</b>	$\rightarrow$	V	V	V	F	V	V	V	V
<b>2.</b>	$\rightarrow$	V	V	F	F	V	V	V	F
<b>3.</b>	$\rightarrow$	V	F	V	V	V	V	V	V
<b>4.</b>		V	F	F	V	F	V	V	
<b>5.</b>		F	V	V	F	V	V	F	
<b>6.</b>		F	V	F	F	V	V	F	
<b>7.</b>		F	F	V	F	V	F	V	
<b>8.</b>		F	F	F	F	V	F	V	

$\rightarrow$  A conclusão é verdadeira para as linhas 1 e 3 e falsa para a linha 2. Ou seja, a conclusão não é verdadeira para todas as linhas críticas. Logo, o argumento é inválido.

13. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não usando as formas válidas de argumentos. Em cada passo, identifique a razão para se obter a conclusão:

- (a)  $p \rightarrow q$
- (b)  $r \vee s$
- (c)  $\neg s \rightarrow \neg t$
- (d)  $\neg q \vee s$
- (e)  $\neg s$
- (f)  $\neg p \wedge r \rightarrow u$
- (g)  $w \vee t$
- (h)  $\therefore u \wedge w$



**Resposta:**

- |              |                                 |                                  |
|--------------|---------------------------------|----------------------------------|
| (i)          | $r \vee s$                      | (b)                              |
|              | $\neg s$                        | (e)                              |
| $\therefore$ | $r$                             | Silogismo disjuntivo             |
| (ii)         | $\neg q \vee s$                 | (d)                              |
|              | $\neg s$                        | (e)                              |
| $\therefore$ | $\neg q$                        | Silogismo disjuntivo             |
| (iii)        | $p \rightarrow q$               | (a)                              |
|              | $\neg q$                        | (ii)                             |
| $\therefore$ | $\neg p$                        | Modus Tollens                    |
| (iv)         | $\neg p \wedge r \rightarrow u$ | (f)                              |
|              | $\neg p \wedge r$               | Adição conjuntiva de (iii) e (i) |
| $\therefore$ | $u$                             | Modus Ponens                     |
| (v)          | $\neg s \rightarrow \neg t$     | (c)                              |
|              | $\neg s$                        | (e)                              |
| $\therefore$ | $\neg t$                        | Modus Ponens                     |
| (vi)         | $w \vee t$                      | (g)                              |
|              | $\neg t$                        | (v)                              |
| $\therefore$ | $w$                             | Silogismo disjuntivo             |
| (vii)        | $u$                             | (iv)                             |
|              | $w$                             | (vi)                             |
| $\therefore$ | $u \wedge w$                    | Adição conjuntiva                |

→ O argumento é válido.

14. Sejam duas variáveis lógicas  $x$  e  $y$ , ou seja variáveis que podem assumir o valor verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ). Seja  $\leftarrow$  o comando de atribuição existente em linguagens de programação como C e  $\odot$  o operador definido no exercício ???. Qual é o valor dessas variáveis ao final da execução sequencial dos três comandos abaixo. Apresente a sua resposta independente dos valores iniciais de  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned}x &\leftarrow \neg(x \odot y) \\y &\leftarrow \neg(x \odot y) \\x &\leftarrow \neg(x \odot y)\end{aligned}$$

**Resposta:**

Reescrevendo os comandos acima com o operador “ou exclusivo” temos (veja exercício ??):

$$\begin{aligned}x &\leftarrow (x \oplus y) \\y &\leftarrow (x \oplus y) \\x &\leftarrow (x \oplus y)\end{aligned}$$

Executando os comandos e lembrando que o operador “ou exclusivo” segue a lei da associatividade e que 0 é o elemento neutro, temos:

$$x \leftarrow (x \oplus y) \tag{1}$$

$$y \leftarrow (x \oplus y) \equiv ((x \oplus y) \oplus y) \equiv (x \oplus (y \oplus y)) \equiv (x \oplus 0) \equiv x \tag{2}$$

$$x \leftarrow (x \oplus y) \equiv ((x \oplus y) \oplus y) \equiv ((x \oplus y) \oplus x) \equiv ((x \oplus x) \oplus y) \equiv (0 \oplus y) \equiv y \tag{3}$$

No comando (1), a variável  $x$  recebe o resultado de  $x \oplus y$ . No comando (2), a variável  $y$  recebe o resultado da operação do “ou exclusivo” entre a variável  $x$ , que contém o resultado de  $x \oplus y$ , e a variável  $y$ . O resultado dessa operação é  $x$ . No comando (3), a variável  $x$  recebe o resultado da operação do “ou exclusivo” entre a variável  $x$ , que contém o resultado de  $x \oplus y$ , e a variável  $y$ , cujo valor é  $x$ . O resultado dessa operação é  $y$ .

Ou seja, após a execução desses três comandos a variável  $x$  tem o valor inicial de  $y$  e a variável  $y$  tem o valor inicial de  $x$ .

O texto, a seguir, foi retirado do livro texto, página 19: “Lógicas Fuzzy são utilizadas em inteligência artificial. Na lógica fuzzy, a proposição tem um valor-verdade que é um número entre 0 e 1 inclusive. Uma proposição com valor-verdade 0 é falsa e uma com valor-verdade 1 é verdadeira. Valores entre 0 e 1 indicam variantes de grau de verdade. Por exemplo, o valor-verdade 0,8 pode ser indicado para uma proposição "Fred é feliz", porque ele é feliz na maior parte do tempo; e o valor-verdade 0,4 pode ser indicado para a proposição "John é feliz", porque ele é feliz menos que a metade do tempo”.

15. O valor-verdade da negação de uma proposição em lógica fuzzy é 1 menos o valor-verdade da proposição. Quais são os valores-verdade das proposições "Fred não é feliz" e "John não é feliz"?

**Resposta:**

$p_f = 0,8$ : "Fred é feliz";

$p_j = 0,4$ : "John é feliz".

$\neg p_f = 1 - p_f = 1 - 0,8 = 0,2$ : "Fred não é feliz";

$\neg p_j = 1 - p_j = 1 - 0,4 = 0,6$ : "John não é feliz";

16. O valor-verdade da disjunção de duas proposições em lógica fuzzy é o máximo dos valores-verdade de duas proposições. Quais são os valores-verdade das proposições "Fred é feliz ou John é feliz" e "Fred não é feliz ou John não é feliz"?

**Resposta:**

Sejam  $p$  e  $q$  variáveis da Lógica Fuzzy. A disjunção  $p \vee q = \max(p; q)$ .

(a) "Fred é feliz ou John é feliz".

$$p_f \vee p_j = \max(0,8; 0,4) = 0,8.$$

(b) "Fred não é feliz ou John não é feliz"

$$\neg p_f \vee \neg p_j = \max(0,2; 0,6) = 0,6.$$

17. Cada habitante de uma vila longínqua sempre diz a verdade ou sempre mente. Um habitante dela dará apenas como resposta um SIM ou um NÃO para a pergunta que um turista fizer. Suponha que você seja um turista que visita essa área e que chegue a uma bifurcação na estrada. Um lado leva até às ruínas que você quer visitar; o outro, às profundezas de uma floresta. Um habitante dessa vila está parado nessa bifurcação. Que pergunta você pode fazer ao habitante para determinar qual lado seguir?

**Resposta:**

Se for perguntado simplesmente qual estrada leva às ruínas e o turista não souber se é um habitante que fala a verdade ou mente, então não é possível determinar se a resposta é correta ou não. A pergunta não pode depender do tipo de habitante e, para isso, é necessário formular uma pergunta que envolva duas questões.

Assim, ao invés de perguntar “a bifurcação da direita leva às ruínas?” (pergunta P1), que não resolve o problema, deve-se perguntar algo similar a “se eu fosse lhe perguntar se a bifurcação da direita me leva às ruínas, você responderia sim?” (pergunta P2). Naturalmente a mesma estratégia pode ser feita para a bifurcação da esquerda. Veja que a pergunta P2 pode ser vista como: “se eu fosse lhe perguntar se **P1**, você responderia sim?”, o que claramente mostra que a pergunta P2 trata de duas questões.

O habitante que fala a verdade responde corretamente. O habitante que fala mentira deve “mentir duas vezes” no sentido que se a pergunta fosse simplesmente “a bifurcação da direita leva às ruínas?”, isto é, P1, ele teria que mentir. No entanto, como há uma segunda questão envolvida “se eu fosse lhe perguntar se P1, você responderia sim?” então esse habitante deve mentir novamente. Esse raciocínio está representado na tabela abaixo.

**P1:** A bifurcação da direita leva às ruínas?

**P2:** Se eu fosse lhe perguntar se a bifurcação da direita me leva às ruínas, você responderia sim?

Tipo de habitante	Bifurcação da direita leva às ruínas?	P1	P2
Fala verdade	Sim	Sim	Sim
	Não	Não	Não
Fala mentira	Sim	Não	Sim
	Não	Sim	Não

Se o habitante sempre fala a verdade, ele dirá ao turista se deve seguir pela bifurcação da direita ou esquerda. Se o habitante sempre fala mentira, ao responder a P2 ele sabe que mentiu ao responder P1 (parte dessa pergunta). No entanto, ele mente novamente e, no final, ele responde corretamente a bifurcação a ser seguida. A estratégia é usar uma dupla negativa.

18. Este sistema de especificações é consistente? “O sistema está em um estado de multiuso se e somente se estiver operando normalmente. Se o sistema está operando normalmente, o núcleo do sistema operacional (*kernel*) está funcionando. O *kernel* não está funcionando ou o sistema está no modo de interrupção. Se o sistema não está em um estado de multiuso, então está em um modo de interrupção. O sistema não está no modo de interrupção.”

**Resposta:**

Sejam os seguintes argumentos:

$p$  = O sistema está em um estado de multiuso.

$q$  = O sistema está operando normalmente.

$r$  = O núcleo do sistema operacional (*kernel*) está funcionando.

$s$  = O sistema está no modo de interrupção.

Tradução dos fatos para as proposições:

(a)  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(b)  $q \rightarrow r$

(c)  $\neg r \vee s$

(d)  $\neg p \rightarrow s$

(e)  $\neg s$

Deduções:

<p>(i) <math>\neg r \vee s</math>  <math>\neg s</math>  <math>\therefore \neg r</math></p>	<p>(c)                  (e)                  Silogismo Disjuntivo</p>
--	---

<p>(ii) <math>q \rightarrow r</math>  <math>\neg r</math>  <math>\therefore \neg q</math></p>	<p>(b)                  (i)                  Modus Tollens</p>
---	--

<p>(iii) <math>\neg p \rightarrow s</math>  <math>\neg s</math>  <math>\therefore p</math></p>	<p>(d)                  (e)                  Modus Tollens</p>
--	--

<p>(iv) <math>(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)</math>  <math>\therefore p \rightarrow q</math></p>	<p>(a)                  Simplificação Conjuntiva</p>
--	--

<p>(v) <math>p \rightarrow q</math>  <math>\neg q</math></p>	<p>(iv)                  (ii)</p>
--	---------------------------------------

$\therefore \neg p$  Modus Tollens

As conclusões (iii) e (v) dizem que  $p$  e  $\neg p$  devem ser verdadeiros, o que claramente é inconsistente.

19. Este sistema de especificações é consistente? “O roteador pode enviar mensagens para o sistema principal somente se ele tratar um novo espaço de endereço. Para o roteador tratar o novo espaço de endereço, é necessário que a última versão do software seja instalada. O roteador pode enviar mensagens ao sistema principal se a última versão do software estiver instalada. O roteador não trata o novo espaço.”

**Resposta:**

Sejam os seguintes argumentos:

$p$  = O roteador pode enviar mensagens para o sistema principal.

$q$  = O roteador trata um novo espaço de endereço.

$r$  = A última versão do software seja instalada.

Tradução dos fatos para as proposições:

(a)  $p$  somente se  $q \equiv p \rightarrow q$

(b) para  $q$  é necessário  $r \equiv r$  é uma condição necessária para  $q \equiv q \rightarrow r$

(c)  $p$  se  $r \equiv r \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg r$

(d)  $\neg q$

Dedução:

(i)	$p \rightarrow q$	(a)
	$\neg q$	(d)
$\therefore$	$\neg p$	Modus Tollens

(ii)	$\neg p \rightarrow \neg r$	(c)
	$\neg p$	(i)
$\therefore$	$\neg r$	Modus Ponens

Pelas deduções acima, as três proposições são falsas:  $\neg q$  de acordo com (d),  $\neg p$  de acordo com (i) e  $\neg r$  de acordo com (ii). Se todas três proposições são falsas, as quatro especificações são verdadeiras e elas são consistentes.

20. Um detetive entrevistou quatro testemunhas de um crime. A partir das histórias das testemunhas, o detetive concluiu que, se o mordomo está dizendo a verdade, então o cozinheiro também está; o cozinheiro e o jardineiro, ambos, não podem estar dizendo a verdade; o jardineiro e o zelador, ambos, não estão mentindo; e se o zelador está dizendo a verdade, então o cozinheiro está mentindo. Para cada uma das quatro testemunhas, o detetive pode determinar se a pessoa está mentindo ou dizendo a verdade?

**Resposta:**

As quatro testemunhas podem ser identificadas pelas variáveis  $C$  (cozinheiro),  $J$  (jardineiro),  $M$  (mordomo) e  $Z$  (zelador), que serão usadas para indicar que estão falando a verdade.

Sejam os seguintes argumentos:

(a)	$M \rightarrow C$	[se o mordomo está dizendo a verdade, então o cozinheiro também está]
(b)	$C \oplus J$	[o cozinheiro e o jardineiro, ambos, não podem estar dizendo a verdade]
(c)	$\neg J \oplus \neg Z$	[o cozinheiro e o jardineiro, ambos, não podem estar dizendo a verdade]
(d)	$Z \rightarrow \neg C$	[se o zelador está dizendo a verdade, então o cozinheiro está mentindo]

Pelos quatro argumentos acima, não é possível aplicar uma regra de inferência. Se fizermos uma tabela da verdade, podemos identificar o cenário no qual as quatro premissas supostamente são verdadeiras, conforme mostrado a seguir.

		<b>Variáveis</b>				<b>Premissas</b>			
		<i>C</i>	<i>J</i>	<i>M</i>	<i>Z</i>	(a)	(b)	(c)	(d)
1.		V	V	V	V	V	F	F	F
2.		V	V	V	F	V	F	V	V
3.		V	V	F	V	V	F	F	F
4.		V	V	F	F	V	F	V	V
5.		V	F	V	V	V	V	V	F
6.		V	F	V	F	V	V	F	V
7.		V	F	F	V	V	V	V	F
8.		V	F	F	F	V	V	F	V
9.		F	V	V	V	F	V	F	V
10.		F	V	V	F	F	V	V	V
11.		F	V	F	V	V	V	F	V
12.	→	F	V	F	F	V	V	V	V
13.		F	F	V	V	F	V	V	V
14.		F	F	V	F	F	F	F	V
15.		F	F	F	V	V	F	V	V
16.		F	F	F	F	V	F	F	V

→ As premissas são verdadeiras para a linha 12, ou seja, o jardineiro fala a verdade e as outras testemunhas não.

O texto, a seguir, foi retirado do livro texto, página 29: “O **dual** de uma proposição composta que contém apenas os operadores lógicos  $\vee$ ,  $\wedge$  e  $\neg$  é a proposição composta obtida pela troca de cada  $\vee$  por  $\wedge$ , cada  $\wedge$  por  $\vee$ , cada  $V$  por  $F$  e cada  $F$  por  $V$ . O dual de  $s$  é representado por  $s^*$ ”.

21. Encontre o dual de cada uma das seguintes proposições compostas:

(a)  $s_1 : p \wedge \neg q \wedge \neg r$

**Resposta:**

$$s_1^* : p \vee \neg q \vee \neg r$$

(b)  $s_2 : (p \wedge q \wedge r) \vee s$

**Resposta:**

$$s_2^* : (p \vee q \vee r) \wedge s$$

(c)  $s_3 : (p \vee F) \wedge (q \vee V)$

**Resposta:**

$$s_3^* : (p \wedge \overline{V}) \vee (q \wedge F)$$

(d) Apresente um exemplo de proposição composta formada por pelo menos duas variáveis tal que  $s \equiv s^*$ .

**Resposta:**

$$s_4 : (p \vee F) \wedge (q \vee V)$$

$$p \wedge V$$

$$p$$

$$s_4^* : (p \wedge V) \vee (q \wedge F)$$

$$p \vee F$$

$$p$$