UFMG/ICEx/DCC — DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 2: Soluções
Proposições Quantificadas – Cálculo de Predicados

Ciências Exatas & Engenharias — 1º Semestre de 2018

1. Determine o conjunto verdade para o predicado

$$n^2 \leq 30$$

e domínio $\mathbb{Z}$.

Resposta:
O conjunto verdade D para o predicado acima é $\{-5, \ldots, 5\}$.

2. Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for falsa apresente um contra-exemplo:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \frac{(a-1)}{a} \text{ não é um inteiro.}$$

Resposta:
A afirmação é falsa para $a = 1$, já que

$$\frac{a-1}{a} = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

que é um inteiro.

3. Escreva a negação da afirmação:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ se } n \text{ é primo então } n \text{ é ímpar ou } n = 2.$$

Resposta:
A negação é dada por:

$$\begin{array}{l}
\exists n \in \mathbb{Z}, \neg(\text{ se } (n \text{ é primo})_{=[p]} \text{ então } ((n \text{ é ímpar})_{=[q]} \text{ ou } (n = 2)_{=[r]}) \equiv \\
\exists n \in \mathbb{Z}, \neg(p \rightarrow (q \vee r)) \equiv \\
\exists n \in \mathbb{Z}, \neg(\neg p \vee (q \vee r)) \equiv \\
\exists n \in \mathbb{Z}, p \wedge (\neg q \wedge \neg r) \equiv \\
\exists n \in \mathbb{Z}, p \wedge \neg q \wedge \neg r \equiv \\
\exists n \in \mathbb{Z}, n \text{ é primo e } n \text{ é par e } n \neq 2.
\end{array}$$

Observe que a afirmação original é verdadeira e sua negação é falsa.

4. Qual é o contrapositivo da afirmação:

$$\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } a - b \text{ é par e } b - c \text{ é par, então } a - c \text{ é par.}$$

Resposta:

$$\begin{array}{l}
\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } (a - b \text{ é par e } b - c \text{ é par})_{=[p]}, \text{ então } (a - c \text{ é par})_{=[q]} \equiv \\
\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } \neg q \text{ então } \neg p \equiv \\
\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } \neg(a - c \text{ é par}) \text{ então } \neg(a - b \text{ é par e } b - c \text{ é par}) \equiv \\
\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } a - c \text{ não é par então } a - b \text{ não é par ou } b - c \text{ não é par}
\end{array}$$

5. Seja $P(x)$ um predicado tal que $x \in \mathbb{R}$ e os seguintes predicados:
– $R(x) : \forall x \in \mathbb{Z}, P(x)$;

– $S(x) : \forall x \in \mathbb{Q}, P(x)$;
– $T(x) : \forall x \in \mathbb{R}, P(x)$.

Encontre uma definição para $P(x)$ que não use "$x \in \mathbb{Z}$" de modo que $R(x)$ seja verdadeiro e $S(x)$ e $T(x)$ sejam falsos. Note que o domínio do predicado $R(x)$ é mais restritivo que o domínio de $P(x)$ já que o tipo de número que pode ser aplicado ao predicado R é apenas do tipo inteiro. Uma observação similar vale para o predicado S, mas nesse caso apenas para números racionais.

Resposta:
Possível resposta: Seja $P(x) : 2x \neq 1$. O predicado $R(x)$ é verdadeiro (conjunto dos números inteiros) enquanto os predicados $S(x)$ e $T(x)$ são falsos. O contra-exemplo é $x = \frac{1}{2}$ para o conjunto dos números racionais e reais.

6. Considere o string de números 0204. Seja a seguinte afirmação: "$\forall x$, se $x = 1$ e x é um caractere no string 0204, então x está à esquerda de todos os 0's no string". Essa afirmação é verdadeira?

   Resposta:
   A negação dessa afirmação é "$\exists x$ tal que $x = 1$ e x é um caractere no string 0204 e x não está à esquerda de todos os 0's no string". A negação é falsa porque o string não contém o caractere 1. Assim, a afirmação é verdadeira por *default*.

7. Reescreva cada afirmação na forma se–então.

   (a) Obter conceito D nesta disciplina é condição suficiente para um estudante ser aprovado.
   Resposta:
   Se um estudante obtém conceito D nesta disciplina então ele é aprovado.

   (b) Chegar no horário todo o dia é uma condição necessária para uma pessoa manter o emprego.
   Resposta:
   Se uma pessoa mantém o emprego então ela chega no horário todo o dia.

   (c) Ser divisível por 8 não é uma condição necessária para um número ser divisível por 4.
   Resposta:
   Não é caso que se um número é divisível por 4 então o número é divisível por 8. Em outras palavras, existe um número que é divisível por 4 e o número não é divisível por 8.

   (d) Ter um grande rendimento não é uma condição suficiente para uma pessoa ser feliz.
   Resposta:
   Não é o caso que se uma pessoa tem um grande rendimento, então a pessoa é feliz. Em outras palavras, existe uma pessoa que tem um grande rendimento e não é feliz.

8. Escreva cada uma das proposições abaixo na forma "p se e somente se q" em português.

   (a) Se está calor lá fora, você compra um sorvete e se você compra um sorvete é porque está calor lá fora.
   Resposta:
   Você compra um sorvete se e somente se está calor lá fora.

   (b) Para que você ganhe na loteria, é necessário e suficiente que você tenha o único bilhete premiado.
   Resposta:
   Você ganhe na loteria se e somente se você tem o único bilhete premiado.

   (c) Você será promovido apenas se você tiver contatos, e você só terá contatos se for promovido.
   Resposta:
   Você será promovido se e somente se você tiver contatos.

   (d) Se você assistir à televisão sua mente se deteriorará, e vice-versa.
   Resposta:
   Sua mente se deteriorará se e somente se você assistir à televisão.

   (e) Os trens atrasam exatamente naqueles dias em que eu viajo neles.
   Resposta:
   Os trens atrasam se e somente se é um dia em que viajo neles.

9. Uma brochura de um clube para passageiros frequentes de vôos diz o seguinte: "você pode selecionar a companhia aérea ***somente se*** se elas oferecem a mesma tarifa mais baixa". Assumindo que "somente se" tem o seu significado formal (significado lógico), este anúncio garante se duas ou mais companhias aéreas oferecem a mesma tarifa mais baixa, o cliente poderá escolher entre elas? Explique.

   Resposta:
   Formalmente não. Sabemos que "somente se" significa "condição suficiente". Assim, formalmente temos: 'se você pode selecionar a companhia aérea então elas oferecem a mesma tarifa mais baixa". O que foi perguntado foi a proposição oposta, ou seja, "se duas ou mais companhias aéreas oferecem a mesma tarifa mais baixa então o cliente poderá escolher entre elas".

10. Sejam os predicados $P(x)$ e $Q(x)$ e suponha que D é o domínio de x. Determine se as seguintes proposições são equivalentes logicamente ou não:

$$\forall x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \stackrel{?}{\equiv} (\forall x \in D, P(x)) \wedge (\forall x \in D, Q(x))$$

   Resposta:
   Seja o domínio $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Assim, temos que

$$(P(x_1) \wedge Q(x_1)) \ldots \wedge \ldots (P(x_n) \wedge Q(x_n)) \equiv (P(x_1) \wedge Q(x_1)) \wedge \ldots \wedge (P(x_n) \wedge Q(x_n))$$

   que são equivalentes logicamente.

11. Diga se a forma do argumento abaixo é válida ou não, apresentando a justificativa.

   Todas as pessoas saudáveis comem um banana por dia.
   João não é uma pessoa saudável.
   $\therefore$ João não come uma banana por dia.

   Resposta:

   $\forall$ p, p é uma pessoa saudável, p come um banana por dia.
   p não é uma pessoa saudável.
   $\therefore$ p não come uma banana por dia.

   Forma inválida: erro inverso, que tem a seguinte versão geral:

   $\forall$ x, se $P(x)$ então $Q(x)$;
   $\neg P(a)$ para a em particular;
   $\therefore$ $\neg Q(a)$.

12. Diga se a forma do argumento abaixo é válida ou não, apresentando a justificativa.

   Se uma série infinita converge, então os termos da série vão para 0.
   Os termos da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vão para 0.
   $\therefore$ A série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge.

   Resposta:

   $\forall$ série infinita s, se s converge então os termos da série vão para 0.
   Os termos da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vão para 0.
   $\therefore$ A série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge.

   Forma inválida: erro recíproco, que tem a seguinte versão geral:

   $\forall$ x, se $P(x)$ então $Q(x)$;
   $Q(a)$ para a em particular;
   $\therefore$ $P(a)$.