UFMG/ICEx/DCC | DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 3: Soluções
Métodos de Prova

Ciências Exatas & Engenharias | 1º Semestre de 2018

1. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

   Teorema: Para todos inteiros k, se $k > 0$ então $k^2 + 2k + 1$ é um número composto.

   Prova: Suponha que k é um número inteiro tal que $k > 0$. Se k^2+2k+1 é composto, então $k^2+2k+1 = r \cdot s$, para inteiros r e s tal que $1 < r < (k^2 + 2k + 1)$ e $1 < s < (k^2 + 2k + 1)$. Já que $k^2 + 2k + 1 = r \cdot s$ e ambos r e s estão necessariamente entre 1 e $k^2 + 2k + 1$, então $k^2 + 2k + 1$ não é primo. Assim, $k^2 + 2k + 1$ é composto, o que devia ser mostrado.

   Resposta:
   A partir do ponto

   > *Já que $k^2+2k+1 = r \cdot s$ e ambos r e s estão necessariamente entre 1 e k^2+2k+1, então k^2+2k+1 não é primo. Assim, $k^2 + 2k + 1$ é composto, o que devia ser mostrado.*

   é usada a questão a ser provada. Nesse ponto na prova, não foi mostrado ainda que k^2+2k+1 é um número composto, o que devia ser provado.

2. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

   Teorema: A soma de quaisquer dois inteiros pares é igual a $4k$ para algum inteiro k.

   Prova: Suponha que m e n são dois inteiros pares quaisquer. Pela definição de par $m = 2k$ para algum inteiro k e $n = 2k$ para algum inteiro k. Por substituição, $m + n = 2k + 2k = 4k$, o que devia ser provado.

   Resposta:
   O erro na "prova" é que o mesmo símbolo k é usado para representar dois números diferentes. Ao supor que m e n são iguais a $2k$, temos que $m = n$ e, assim, a prova é válida apenas para o caso onde $m = n$. Se $m \neq n$, a conclusão é, em geral, falsa. Por exemplo, $6 + 4 = 10$ mas $10 \neq 4k$ para qualquer inteiro k.

3. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

   Teorema: Seja n um número inteiro ímpar. Sabe-se que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$.

   Prova: Suponha que n é um número inteiro ímpar. Sabe-se que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Consequentemente,

   $$\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \frac{(2k+1)-1}{2} = \frac{2k}{2} = k.$$

   Como $n = 2k + 1$, temos que $k = (n-1)/2$. Assim, por substituição temos que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$.

   Esta prova incorreta usa a questão a ser provada. A igualdade $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é o que deve ser provado. Ao substituir $2k+1$ por n nos dois lados da igualdade e assumindo que o resultado é verdadeiro, a prova assume a verdade da conclusão a ser provada.

   Resposta:
   Prova "correta": Suponha que n é um número inteiro ímpar. Sabe-se que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Consequentemente,

   $$\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k.$$

   Note que $\lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = k$ pela definição da função "chão", já que k é o maior inteiro menor ou igual a $k + \frac{1}{2}$.
   Ao substituirmos n por $2k + 1$ no lado direito da equação proposta, temos:

   $$\left(\frac{(2k+1)-1}{2} \right) = \left(\frac{2k}{2} \right) = k.$$

   Assim, os lados esquerdo e direito da equação a ser provada são idênticos.

4. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n, $4(n^2+n+1)-3n^2$ é um quadrado perfeito.

   Resposta:
   Prova: Suponha que n seja um número inteiro. Então $4(n^2+n+1)-3n^2 = 4n^2+4n+4-3n^2 = n^2+4n+4 = (n+2)^2$, que é um quadrado perfeito já que $n+2$ é um inteiro.

5. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Existe um inteiro k tal que $k \geq 4$ e $2k^2-5k+2$ é primo.

   Resposta:
   Para provar que a afirmação é falsa, devemos mostrar que a negação é verdadeira. A negação é "para todos inteiros k, para $k \geq 4$, $2k^2-5k+2$ não é primo".

   Prova da negação: Suponha que k seja um inteiro tal que $k \geq 4$. [Devemos mostrar que $2k^2-5k+2$ não é primo]. Ao fatorarmos $2k^2-5k+2$ obtemos $(2k-1)(k-2)$. Como $k \geq 4$, podemos fazer as seguintes afirmações sobre cada termo: (i) o termo $(2k-1) \geq 7$ já que $2k-1 \geq 2\cdot 4-1 = 7$ e (ii) o termo $(k-2) \geq 2$ já que $2k-2 \geq 2\cdot 4-2 = 2$. Assim, cada fator desse número é um inteiro positivo maior ou igual a dois e, assim $2k^2-5k+2$ não é primo.

6. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n e m, se $n-m$ é par então n^3-m^3 é par.

   Resposta:
   Prova: Suponha que m e n são quaisquer inteiros tais que $m-n$ é par. [Devemos mostrar que n^3-m^3 é par.] Note que $n^3-m^3 = (n-m)(n^2+nm+m)$. Sabemos que $(n-m)$ é par pela suposição. Temos que (n^2+nm+m) é um número inteiro já que potenciação, multiplicação e soma são operações fechadas no conjunto dos números inteiros. Assim, $(n-m)(n^2+nm+m)$ é o produto de um número par por um inteiro. A multiplicação de um inteiro por um número par pode ser representada pela soma desse inteiro uma quantidade par de vezes, o que resulta em um número par. Isso é o que devia ser provado.

7. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. O quociente de dois números racionais é um número racional.

   Resposta:
   Reescrevendo a afirmação: $\forall$ números racionais r e s, $\frac{r}{s}$ é um número racional.

   Prova: Seja r um número racional qualquer e $s = 0$, que é um número racional. O quociente de r por s é indefinido e, assim, não é necessariamente um número racional. Assim, a afirmação é falsa.

8. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não sem usar manipulação algébrica, ou seja, sem "resolver" a equação. Suponha que m seja um número inteiro. Prove se $17|m$ na equação:

   $$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot m \stackrel{?}{=} 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$$

   Resposta:
   Prova: O número 17 é um fator primo do número do lado direito da equação e é um fator primo do número do lado esquerdo (pelo Teorema Único da Fatorização). Mas 17 não é um fator primo de 8, 7, 6, 5, 4, 3 e 2. Assim, 17 deve ocorrer como um fator primo de m e $17|m$.

9. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não:

   $$\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } a|b \text{ e } a|c \text{ então } a|(b+c)$$

   Resposta:
   Prova: Suponha que a, b e c são inteiros tal que $a|b$ e $a|c$. Pela definição de divisibilidade $b = a\cdot r$ e $c = a \cdot s$ para inteiros r e s. Então $b+c = a\cdot r + a\cdot s = a(r+s)$. Logo, $a|(b+c) = a|a(r+s)$.

10. Suponha que você está participando de uma promoção de uma loja que dá um cartão com números quando um cliente faz uma compra. Se existem números nesse cartão que somam 100, então o cliente ganha um prêmio de R$100,00. Um cliente recebe um cartão com os números

72	21	15	36	69	81	9	27	42	63

Sem fazer combinações de somas, mostre se o cliente irá ganhar o prêmio ou não.

<u>**Resposta**:</u>
Cada um dos números anteriores é divisível por 3. Qualquer soma com esses números provê como resultado um número que é divisível por 3. Como 100 não é divisível por 3, qualquer soma não será igual a 100. Assim, o cliente não ganhará o prêmio com esse cartão.

11. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não: A soma de quatro números inteiros consecutivos não é divisível por 4.

<u>**Resposta**:</u>
Reescrevendo a afirmação: $\forall$ números inteiros n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$, $4 \not| [n+(n+1)+(n+2)+(n+3)]$.

Prova: Sejam n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$ quatro números inteiros consecutivos. Essa soma S vale $4n+6 = 4n+4+2 = 4(n+1)+2$, que pode ser representada como $S = 4t+2$. Quando S é dividido por 4 temos 2 como resto. Assim, essa soma não é divisível por 4.

12. Prove que para qualquer inteiro ímpar n, $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = (\frac{n-1}{2})(\frac{n+1}{2})$.

<u>**Resposta**:</u>
Prova: Seja n um inteiro ímpar qualquer. Pela definição de ímpar, $n = 2k+1$ para algum inteiro k. Assim, temos que

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k^2+4k+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor k^2+k+\frac{1}{4} \right\rfloor = k^2+k.$$

Note que $\lfloor k^2+k+\frac{1}{4} \rfloor = k^2+k$ pela definição da função "chão", já que k^2+k é o maior inteiro menor ou igual a $k^2+k+\frac{1}{4}$.

Ao substituirmos n por $2k+1$ no lado direito da equação proposta, temos:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{(2k+1)-1}{2}\right)\left(\frac{(2k+1)+1}{2}\right) = \left(\frac{2k}{2}\right)\left(\frac{2k+2}{2}\right) = k(k+1) = k^2+k.$$

Assim, os lados esquerdo e direito da equação a ser provada são idênticos.

13. O resultado de $\frac{1}{0}$ é um número irracional? Explique.

<u>**Resposta**:</u>
Sabe-se que um número irracional é um número real que não é um número racional. Assim, o resultado de $\frac{1}{0}$ não é um número irracional já que não é um número real (divisão por zero não está definida para o conjunto dos números reais).

14. Prove por contradição que para todos os números primos a, b e c, $a^2+b^2 \neq c^2$.

<u>**Resposta**:</u>
Prova: Suponha que não, ou seja, suponha que existam números primos a, b e c tais que $a^2+b^2 = c^2$. Temos que $a^2 = c^2-b^2 = (c-b)(c+b)$. Sabemos que $c-b = 1$ ou $c-b > 1$ já que $c+b > 0$ e $a^2 > 0$, i.e., $c-b$ deve ser positivo. Assim, temos dois casos:

Caso 1 ($c-b=1$): Os únicos valores possíveis para b e c são $c=3$ e $b=2$ para a diferença entre esses números primos ser 1, o que implica que $b=2$. Logo, $a^2 = c^2-b^2 = (3-2)(3+2) = 5$, i.e., $a = \sqrt{5}$. Mas isto contradiz a suposição que a seja um número primo.

Caso 2 ($c-b>1$): Devemos ter que ambos $(c-b) > 1$ e $(c+b) > 1$. Como a é primo, os únicos fatores positivos de a^2 são 1, a e a^2. Como ambos $(c-b)$ e $(c+b)$ são maiores que 1, a única possibilidade é que ambos sejam iguais a a. Mas isto implica que $c-b = c+b$, i.e., $-b = b$ e assim $b = 0$. Isto contradiz a suposição que b seja um número primo.

Nos dois casos a contradição é falsa e, assim, a suposição é falsa e a afirmação original é verdadeira.

15. Prove por contraposição que se a soma de dois números reais é menor que 50 então pelo menos um dos números é menor que 25.

<u>**Resposta**:</u>
Reescrevendo formalmente temos: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $x+y < 50$ então $x < 25$ ou $y < 25$. A forma contrapositiva dessa afirmação é $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $x \geq 25$ e $y \geq 25$ então $x+y \geq 50$.

Prova: Suponha que x e y sejam números reais específicos mas escolhidos arbitrariamente tais que $x \geq 25$ e $y \geq 25$. Consequentemente, $a+b \geq 25+25 = 50$. Assim, se $x+y < 50$ então $x < 25$ ou $y < 25$.

16. Apresente um teorema cuja prova seja na forma geométrica.

    Resposta:
    Veja a prova para o Teorema de Pitágoras.

17. Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, então $x \neq 3$.

    Resposta:
    Prova: Sejam x e y números reais arbitrários. Suponha o contrário, isto é, $x = 3$. Substituindo-se x por 3 em $x^2 + y = 13$, obtém-se $3^2 + y = 13$. Assim, $y = 13 - 9 = 4$, o que resulta em uma contradição. Portanto, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.

18. Prove que se $x > 0$ e $x < y$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, então $x^2 < y^2$.

    Resposta:
    Prova: Sejam x e y números reais arbitrários tais que $x > 0$ e $x < y$. Ou seja, temos que $0 < x < y$ e, portanto, $y > 0$. Consequentemente, $x^2 < xy < y^2$. De onde se conclui que $x^2 < y^2$.

19. Prove que $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ para quaisquer números reais x e y.

    Resposta:
    Prova: Sejam x e y números reais arbitrários. Sabe-se que $x < y$, $x = y$ ou $x > y$. Serão considerados cada um dos três casos:

    – $x < y$: tem-se que $\min(x, y) = x$ e $\max(x, y) = y$;
    – $x = y$: $\min(x, y) = \max(x, y) = x = y$;
    – $x > y$: $\min(x, y) = y$ e $\max(x, y) = x$.

    Em qualquer um dos três casos, $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$. Portanto, $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ para quaisquer números reais x e y.

20. Prove por contradição que há uma infinidade de números primos.

    Resposta:
    Prova: Suponha que há uma quantidade limitada de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ para algum natural n. Seja $k = (p_1 p_2 \ldots p_n) + 1$. Deste modo, k não é divisível por nenhum dos números primos$p_1, p_2, \ldots, p_n$. Portanto, k é divisível por algum outro número primo diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ou k é primo. Em qualquer dos dois casos, tem-se a existência de um primo diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Isto contradiz a suposição de que existe uma quantidade limitada de números primos.

21. Prove que se $n = ab$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

    Resposta:
    Prova: Sejam a e b dois inteiros positivos tais que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Multiplicando-se as duas desigualdades, obtém-se $ab > \sqrt{n}\sqrt{n}$, o que implica em $ab > n$. Isso mostra que $ab \neq n$. Portanto, a proposição é verdadeira.

    Prove ou apresente um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

    > O produto de quaisquer três números inteiros consecutivos é par.

    Resposta:
    Prova. Existem dois casos a considerar:

    (i) Seja n um número inteiro par, i.e., $n = 2k$. O produto de três inteiros consecutivos é $2k \times (2k+1) \times (2k+2) = 8k^3 + 12k^2 + 4k = 2(4k^3 + 6k^2 + 2k)$, que é par.

    (ii) Seja n um número inteiro ímpar, i.e., $n = 2k+1$. O produto de três inteiros consecutivos é $(2k+1) \times (2k+2) \times (2k+3) = 8k^3 + 24k^2 + 22k + 6 = 2(4k^3 + 12k^2 + 11k + 3)$, que é par.

    Assim, o produto de quaisquer três números inteiros consecutivos é par.