UFMG/ICEx/DCC DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 4
Sequências e Indução Matemática

Ciências Exatas & Engenharias 1º Semestre de 2018

1. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável, ou seja, é possível atribuir (associar) a cada número racional um número natural. Abaixo, os números racionais positivos estão representados na forma de um par ordenado onde o primeiro número representa o numerador e o segundo o denominador. Começando do número racional 1 — par ordenado $(1,1)$ — é possível associar o número natural 1 e, seguindo o sentido das setas, atribuir o próximo número natural definindo assim uma sequência de enumeração. Dado o número racional positivo $\frac{p}{q}$, qual é o número natural correspondente?

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\uparrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \ \ldots \\
(1,6) & & (2,6) & & (3,6) & & (4,6) & & (5,6) & & (6,6)\ldots \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & \\
(1,5) & & (2,5) & & (3,5) & & (4,5) & & (5,5) & & (6,5)\ldots \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & & & & & & \\
(1,4) & & (2,4) & & (3,4) & & (4,4) & & (5,4) & & (6,4)\ldots \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & & & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & (4,3) & & (5,3) & & (6,3)\ldots \\
\uparrow & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & & (5,2) & & (6,2)\ldots \\
 & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & & \searrow & & \nwarrow & \\
(1,1) & \rightarrow & (2,1) & & (3,1) & \rightarrow & (4,1) & & (5,1) & \rightarrow & (6,1)\ldots
\end{array}$$

2. Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

3. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, n \geq 1.$$

4. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, n \geq 1.$$

5. Prove por indução matemática que

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

6. Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

7. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

8. Ache a fórmula fechada para o produto

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\forall$ inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

9. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

10. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1)i},$$

$\forall$ inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

11. Prove o seguinte predicado $P(n)$ usando indução matemática:

    $P(n)$: Qualquer número inteiro positivo $n \geq 8$ pode ser escrito como a soma de 3's e 5's.

12. Suponha que temos selos de 4 e 7 centavos. Prove que é possível ter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando somente esses selos.

13. Prove por indução matemática que $n^2 < 2^n$, para todos inteiros $n \geq 5$.

14. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_k &= 7a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

15. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_k &= a_{k-2} + 2a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que a_n é ímpar para todos os inteiros $n \geq 1$.

16. Seja a seqüência $g_0, g_1, g_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} g_0 &= 12 \\ g_1 &= 29 \\ g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

17. Seja a seqüência $h_0, h_1, h_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= 2 \\ h_2 &= 3 \\ h_k &= h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $h_n \leq 3^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

18. Seja a seqüência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_k &= 5x_{k-1}^3 + 7x_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que se k é múltiplo de 3 então x_k é par.

19. Seja a seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= a_{k-1} + 3^k(k-1), \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k-ésimo termo e prove por indução matemática.

20. Seja a seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_k &= k - a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 1 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k-ésimo termo e prove por indução matemática.

21. Prove por indução matemática que $\forall n \geq 1, 3^n - 2$ é ímpar.