

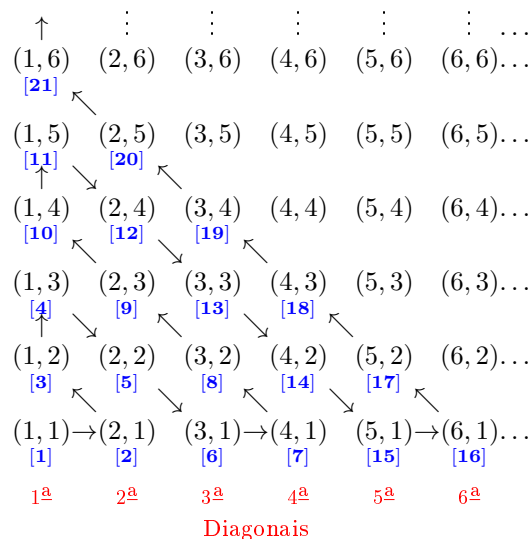
LISTA DE EXERCÍCIOS 4: SOLUÇÕES
SEQUÊNCIAS E INDUÇÃO MATEMÁTICA

1. O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável, ou seja, é possível atribuir (associar) a cada número racional um número natural. Abaixo, os números racionais positivos estão representados na forma de um par ordenado onde o primeiro número representa o numerador e o segundo o denominador. Começando do número racional 1 — par ordenado $(1, 1)$ — é possível associar o número natural 1 e, seguindo o sentido das setas, atribuir o próximo número natural definindo assim uma sequência de enumeração. Dado o número racional positivo $\frac{p}{q}$, qual é o número natural correspondente?



Resposta:

De acordo com o enunciado acima, a enumeração dos números racionais irá ocorrer da forma apresentada a seguir (o número natural associado a cada número racional está entre colchetes):



Pontos a observar:

- O número racional positivo $\frac{p}{q}$ é representado pelo par ordenado (p, q) ;

- A soma dos índices p e q dos pares ordenados ao longo de cada diagonal é a mesma. Na primeira diagonal temos apenas um par ordenado, i.e., $(1, 1)$, e a soma vale 2. A partir da segunda diagonal, as somas dos índices valem 3, 4, 5, etc;
- Na primeira diagonal temos um par ordenado, na segunda dois, na terceira três e assim sucessivamente. Isso significa que em cada diagonal temos $(p + q) - 1$ pares ordenados;
- Quando a soma $p + q$ é um número ímpar, a enumeração ocorre de baixo para cima e, quando é par, ocorre de cima para baixo;
- Para calcular o número natural k associado ao número racional (p, q) temos que saber quantos pares ordenados existem nas diagonais anteriores à diagonal onde se encontra o par (p, q) . Essa é a soma de 1 a $(p + q) - 2$, representada por S :

$$S \leftarrow \frac{[(p + q) - 2] \times [(p + q) - 1]}{2}.$$

- Finalmente, deve-se determinar o sentido da enumeração (de baixo para cima, ou vice-versa) para o par (p, q) :

se $(p + q) \bmod 2 = 0$ // $(p + q)$ é um número par, i.e., a diagonal é de descida?
então $k \leftarrow S + p$ // Sim, devemos somar a S o valor de p , que é o termo que cresce.
senão $k \leftarrow S + q$ // Não, devemos somar a S o valor de q , que é o termo que cresce.

fimse

Observe que quando o sentido da enumeração é de cima para baixo ao longo da diagonal, o número p deve ser somado a S para determinar a posição correta da enumeração. Quando o sentido da enumeração for o contrário, o número q deve ser somado.

2. Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, n \geq 1.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

- (a) Passo base: Para $n = 1$, $1^2 = 1$ e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. O passo base é verdadeiro.
 (b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} \end{aligned}$$

3. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, n \geq 1.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1 = 1^2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

4. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2, n \geq 1.$$

Resposta:

Essa prova pode ser dividida em duas partes: (i) prova do somatório do lado direito e substituição pela fórmula fechada, e (ii) prova do somatório do lado esquerdo. Sabe-se que a soma $1 + 2 + \dots + n$, $n \geq 1$, vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (esta prova pode ser obtida por indução matemática). Assim, temos que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1.$$

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)(k+1)^2 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

5. Prove por indução matemática que

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

- (a) Passo base: Para $n = 1$, $2 \cdot 1 = 2$ e $1^2 + 1 = 2$. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2k &= k^2 + k \\ &= k(k+1), k \geq 1 \end{aligned}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2k + 2(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\ &= (k+1)[(k+1) + 1] \\ &= (k+1)(k+2), k \geq 1 \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k + 2 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

6. Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

- (a) Passo base: Para $n = 2$, $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^1 i(i+1) = 1(1+1) = 2$ e $\frac{n(n-1)(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{2} = 2$. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\sum_{i=1}^k i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i(i+1) &= \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k(k+1) \\ &= \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k-1)(k+1) + 3k(k+1)}{3} \\
&= \frac{k(k+1)[(k-1) + 3]}{3} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}
\end{aligned}$$

7. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

\forall inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

Somando os primeiros termos e simplificando temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{2}{3} \\
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{3}{4} \\
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} &= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

o que leva a conjectura que para todos os inteiros positivos n ,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- (a) Passo base: Para $n = 1$, $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, que é o valor da fórmula fechada. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

8. Ache a fórmula fechada para o produto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

\forall inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:

Seja a suposição que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$$

\forall inteiros $n \geq 2$. Deve-se provar que de fato essa suposição é verdadeira.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 2$, $\prod_{i=2}^2 \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e a fórmula fechada vale $\frac{1}{2}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{i=2}^k \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{k}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{i=2}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{k+1}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{i}\right) &= \prod_{i=2}^k \left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k}\right) \cdot \left(\frac{(k+1) - 1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

9. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

\forall inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:

Seja a suposição que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

\forall inteiros $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $\frac{1}{(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ e a fórmula fechada vale $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \\ &\quad \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

10. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i},$$

\forall inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:

Seja a suposição que

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$$

\forall inteiros $n \geq 2$. Deve-se provar que de fato essa suposição é verdadeira.

Prova (por indução matemática):

- (a) Passo base: Para $n = 2$, os dois lados da equação valem $\frac{1}{2}$. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$\sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{k}, k \geq 2.$$

– Deve-se mostrar que:

$$\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{k+1}, k \geq 2.$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{(i-1)i} &= \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-1)i} + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

11. Prove o seguinte predicado $P(n)$ usando indução matemática:

$P(n)$: Qualquer número inteiro positivo $n \geq 8$ pode ser escrito como a soma de 3's e 5's.

Resposta:

Prova (por indução matemática fraca):

- (a) Passo base: $P(n_0) = P(8)$: Para $n_0 = 8$, temos que $8 = 3 + 5$ e o predicado P é verdadeiro.
 (b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.
 – Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e.,

$$P(k) : k = 3a + 5b,$$

para $a \geq 0$ e $b \geq 0$. [hipótese indutiva]

– Deve-se mostrar que

$$P(k + 1) : k + 1 = 3a' + 5b',$$

para $a' \geq 0$ e $b' \geq 0$.

Dois casos a considerar para $k + 1$:

- (i) $b \neq 0$: É possível substituir um 5 por dois 3's quando é feita a soma de:

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3a + 5b + 1 \\ &= 3a + 5(b - 1) + 5 + 1 \\ &= 3a + 2 \cdot 3 + 5(b - 1) \\ &= 3a' + 5b' \end{aligned}$$

- (ii) $b = 0$: Neste caso, deve haver pelo menos três 3's para termos valores de $n \geq 9$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3a + 1 \\ &= 3(a - 3) + 3 \cdot 3 + 1 \\ &= 3a' + 2 \cdot 5 \\ &= 3a' + 5b' \end{aligned}$$

[Isto era o que devia ser provado.]

12. Suponha que temos selos de 4 e 7 centavos. Prove que é possível ter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando somente esses selos.

Resposta:

Prova (por indução matemática forte):

- (a) Passo base: Para os seguintes valores de postagem p é possível usar apenas selos de 4 e 7 centavos.

p	Selos
18	$7 + 7 + 4$
19	$7 + 4 + 4 + 4$
20	$4 + 4 + 4 + 4 + 4$
21	$7 + 7 + 7$

Assim, o passo base é verdadeiro.

- (b) Passo indutivo: Vamos supor que para todos inteiros p , $18 \leq p < k$, p seja um valor de postagem que pode ser obtido apenas com selos de 4 e 7 centavos. Vamos provar que a proposição também é verdadeira para k .

Ao dividirmos k por 4 temos um quociente q e um resto entre 0 e 3. Ao dividirmos os valores de postagem $p \in [18, 21]$ temos também como resto os valores entre 0 e 3. Ou seja, k pode ser expresso como um valor de postagem p entre 18 e 21 somando de um fator múltiplo de 4. Formalmente temos que $k \equiv p \pmod{4}$ para um valor de $p \in [18, 21]$. Isto é lido como: k é congruente com p módulo 4, o que significa que existe um valor de $p \in [18, 21]$ que quando dividido por 4 deixa o mesmo resto que k quando dividido por 4.

13. Prove por indução matemática que $n^2 < 2^n$, para todos inteiros $n \geq 5$.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 5$, a desigualdade $5^2 < 2^5$ é verdadeira. Assim, o passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 5$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

– Hipótese indutiva:

$$k^2 < 2^k$$

para todos inteiros $k \geq 5$.

– Deve-se mostrar que:

$$(k + 1)^2 < 2^{k+1}$$

para todos inteiros $k \geq 5$.

Sabe-se que:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2k + 1$$

pela hipótese indutiva. Sabe-se também que

$$2k + 1 < 2^k$$

para $k \geq 3$. Colocando estas desigualdades juntas, temos;

$$(k + 1)^2 < 2^k + 2k + 1 < 2^k + 2^k$$

14. Seja a seqüência a_1, a_2, a_3, \dots definida como

$$a_1 = 3$$

$$a_k = 7a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1, a_n = a_1 = 3 \cdot 7^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

– Hipótese indutiva:

$$a_k = 3 \cdot 7^{k-1}$$

para todos inteiros $k \geq 1$.

– Deve-se mostrar que:

$$a_{k+1} = 3 \cdot 7^{(k+1)-1} = 3 \cdot 7^k$$

para todos inteiros $k \geq 1$.

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 7a_k, & \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \\ &= 7 \cdot (3 \cdot 7^{k-1}) & \text{Hipótese indutiva} \\ &= 3 \cdot 7^k \end{aligned}$$

15. Seja a seqüência a_1, a_2, a_3, \dots definida como

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3$$

Prove por indução matemática que a_n é ímpar para todos os inteiros $n \geq 1$.

Resposta:

Prova (por indução matemática forte):

- (a) Passo base: A propriedade é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$, já que $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$, que são ímpares.
- (b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i , $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.
- Hipótese indutiva: Seja $k > 2$ um inteiro e suponha que a_i é ímpar para todos os inteiros i , $1 \leq i < k$.
 - Deve-se mostrar que a_k é ímpar. Sabe-se pela definição de

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = a_{k-2} + 2a_{k-1}$$

Sabe-se também que a_{k-2} é ímpar pela hipótese indutiva, já que $1 \leq k-2 < k$ e $k > 2$, e $2a_{k-1}$ é par, pela definição de número par. Assim,

$$a_{k-2} + 2a_{k-1}$$

é a soma de um número ímpar e um número par, que dá como resultado sempre um número ímpar.

16. Seja a seqüência g_0, g_1, g_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} g_0 &= 12 \\ g_1 &= 29 \\ g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

Resposta:

Prova (por indução matemática forte):

- (a) Passo base: Para $n = 0$, temos que $g_0 = 5 \cdot 3^0 + 7 \cdot 2^0 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$ e para $n = 1$, temos que $g_1 = 5 \cdot 3^1 + 7 \cdot 2^1 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 29$. Logo, o passo base é verdadeiro.
- (b) Passo indutivo: Se $k > 1$ e a propriedade é verdadeira para todos i , $1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.
- Hipótese indutiva: Seja $k > 1$ um inteiro e suponha que $g_k = 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k$ para todos os inteiros i , $1 \leq i < k$.
 - Deve-se mostrar que $g_k = 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k$ para $n = k$.
- Sabe-se que:

$$\begin{aligned} g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2} \\ &= 5(5 \cdot 3^{k-1} + 7 \cdot 2^{k-1}) - 6(5 \cdot 3^{k-2} + 7 \cdot 2^{k-2}) \\ &= 25 \cdot 3^{k-1} + 35 \cdot 2^{k-1} - 30 \cdot 3^{k-2} - 42 \cdot 2^{k-2} \\ &= 3^{k-2}(25 \cdot 3 - 30) + 2^{k-2}(35 \cdot 2 - 42) \\ &= 3^{k-2} \cdot 45 + 2^{k-2} \cdot 28 \\ &= 3^{k-2}(9 \cdot 5) + 2^{k-2}(4 \cdot 7) \\ &= 5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k \end{aligned}$$

17. Seja a seqüência h_0, h_1, h_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= 2 \\ h_2 &= 3 \\ h_k &= h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $h_n \leq 3^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

Resposta:

Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base: A propriedade é verdadeira para

n	h_n	3^n
0	$h_0 = 1$	$3^0 = 1$
1	$h_1 = 2$	$3^1 = 3$
2	$h_2 = 3$	$3^2 = 9$

(b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos $i, 1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

- Hipótese indutiva: Seja $k > 2$ um inteiro e suponha que $h_i \leq 3^i$ para todos os inteiros $i, 1 \leq i < k$.
- Deve-se mostrar que $h_k \leq 3^k$. Sabe-se pela definição de

$$h_k = h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}$$

Sabe-se também que

$$\begin{aligned} h_{k-1} &\leq 3^{k-1} \\ h_{k-2} &\leq 3^{k-2} \\ h_{k-3} &\leq 3^{k-3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h_k &= h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3} \\ &\leq 3^{k-1} + 3^{k-2} + 3^{k-3} \\ &\leq 3^{k-3}(3^2 + 3^1 + 1) \\ &\leq 3^{k-3}(3 \cdot 4) \\ &\leq 4 \cdot 3^{k-2} \leq 3^k \end{aligned}$$

já que $4 < 3^2$.

18. Seja a seqüência x_0, x_1, x_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_k &= 5x_{k-1}^3 + 7x_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que se k é múltiplo de 3 então x_k é par.

Resposta:

Prova (por indução matemática forte):

(a) Passo base:

Ao observarmos essa seqüência temos:

i	x_i	Número
0	0	par
1	1	ímpar
2	$5 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 = 5$	ímpar
3	$5 \cdot 5^3 + 7 \cdot 0 = 632$	par
\vdots	\vdots	\vdots

Para os índices 0 e 3, múltiplos de 3, a proposição está correta e, assim, o passo base é verdadeiro. (Se continuarmos a calcular os próximos valores de x_i veremos que ambos x_4 e x_5 são números ímpares e x_6 é par.

(b) Passo indutivo: Se $k \geq 2$ e a propriedade é verdadeira para todos $i, 1 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.

- Hipótese indutiva: seja $k = 3k'$, ou seja, k é um múltiplo de 3. Os números $x_{3k'-1}$ e $x_{3k'-2}$ são ímpares.
- Deve-se mostrar que $x_{3k'}$ é par.
Sabe-se que

$$x_{3k'} = 5x_{3k'-1}^3 + 7x_{3k'-2}.$$

O primeiro termo terá como resultado um número ímpar já que $x_{3k'-1}$ é ímpar que quando elevado a uma potência cúbica multiplicado por um fator ímpar, fornece um número ímpar. O segundo termo terá como resultado um número ímpar já que $x_{3k'-2}$ é ímpar que quando multiplicado por um fator ímpar, fornece um número ímpar. Assim, como $x_{3k'}$ é o resultado da soma de dois números ímpares, temos que $x_{3k'}$ é par.

19. Seja a seqüência a_0, a_1, a_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= a_{k-1} + 3^k(k-1), \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k -ésimo termo e prove por indução matemática.

Resposta:

Ao observarmos essa seqüência temos:

i	a_i
0	0
1	0
2	$0 + 1 \cdot 3^2$
3	$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3$
4	$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4$
\vdots	\vdots

ou seja, o termo

$$a_k = \sum_{i=2}^k (i-1)3^i = \sum_{i=2}^k i3^i - \sum_{i=2}^k 3^i.$$

Calcule essa soma sabendo que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} ix^i = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Dica: transforme a soma $\sum_{i=0}^{n-1} ix^i$ em uma soma $\sum_{i=2}^n ix^i$, ou seja, acrescente o termo para $i = n$ e remova os termos para $i = 0$ e $i = 1$.

20. Seja a seqüência a_0, a_1, a_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_k &= k - a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 1 \end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k -ésimo termo e prove por indução matemática.

Resposta:

Ao observarmos essa sequência temos:

i	a_i
0	0
1	1
2	$2 - 1 = 1$
3	$3 - 1 = 2$
4	$4 - 2 = 2$
5	$5 - 2 = 3$
6	$6 - 3 = 3$
7	$7 - 3 = 4$
8	$8 - 4 = 4$
\vdots	\vdots

ou seja, o termo

$$a_k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Se k é par então $a_k = \frac{k}{2}$; se k é ímpar então $a_k = \frac{k+1}{2}$.

Prova (por indução matemática forte):

- (a) Passo base: A propriedade é verdadeira para $i = 0..8$.
- (b) Passo indutivo: Se $k > 2$ e a propriedade é verdadeira para todos i , $0 \leq i < k$, então deve ser verdadeira para $n = k$.
- Hipótese indutiva: Se i é par então $a_i = \frac{i}{2}$; se i é ímpar então $a_i = \frac{i+1}{2}$, para $0 \leq i < k$.
 - Deve-se mostrar que essa proposição é verdadeira para k .
- Sabe-se que $a_k = k - a_{k-1}$. Temos dois casos:
- (i) k é par: $a_k = k - a_{k-1} = k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$, já que $k-1$ é ímpar e $a_{k-1} = \frac{k-1+1}{2}$.
- (ii) k é ímpar: $a_k = k - a_{k-1} = k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$, já que $k-1$ é par e $a_{k-1} = \frac{k-1}{2}$.

21. Prove por indução matemática que $\forall n \geq 1, 3^n - 2$ é ímpar.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

- (a) Passo base: Para $n = 1$, $3^1 - 2 = 1$ é ímpar. O passo base é verdadeiro.
- (b) Passo indutivo: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.
- Hipótese indutiva: $\forall k \geq 1, 3^k - 2$ é ímpar.
 - Deve-se mostrar que: $3^{k+1} - 2$ é ímpar.
- Sabe-se que: $3^{k+1} - 2 = 3 \cdot 3^k - 2 = 3 \cdot 3^k - 6 + 4 = 3(3^k - 2) + 4$.
- Pela hipótese indutiva $3^k - 2$ é um número ímpar que quando multiplicado por 3 e somado com 4 continua sendo um número ímpar.