UFMG/ICEx/DCC | DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 5: Soluções
Teoria dos Conjuntos

Ciências Exatas & Engenharias | 1º Semestre de 2018

1. Escreva uma negação para a seguinte afirmação: $\forall$ conjuntos A, se $A \subseteq \mathbb{R}$ então $A \subseteq \mathbb{Z}$. O que é verdadeira: a afirmação ou sua negação? Justifique a sua resposta.

   Resposta:
   Negação: $\exists$ um conjunto A tal que $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \not\subseteq \mathbb{Z}$.

   A negação é verdadeira. Por exemplo, seja $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 2\}$. Então $A \subseteq \mathbb{R}$ mas $A \not\subseteq \mathbb{Z}$, já que, por exemplo, $\frac{1}{2} \in A$.

2. Sejam os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{m \in \mathbb{Z} | m = 2i - 1, \text{ para algum inteiro } i\} \\ B &= \{n \in \mathbb{Z} | n = 3j + 2, \text{ para algum inteiro } j\} \end{aligned}$$

   Prove se $A = B$.

   Resposta:
   Tem-se que $A \neq B$. Por exemplo, $1 \in A$, já que $a = 2 \cdot 1 - 1$, mas $1 \notin B$. Se 1 fosse um elemento de B, então teríamos $1 = 3j + 2$, para algum inteiro j, o que daria:

$$\begin{aligned} 3j + 2 &= 1 \\ 3j &= -1 \\ j &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

   o que não é um número inteiro, ou seja, $1 \notin B$. Assim, existe um elemento em A que não está em B. Conseqüentemente, $A \neq B$.

3. Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v\}$ e $C = \{m, n\}$. Liste os elementos do conjunto $A \times (B \times C)$.

   Resposta:

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) = \{&(1,(u,m)),(2,(u,m)),(3,(u,m)), \\ &(1,(u,n)),(2,(u,n)),(3,(u,n)), \\ &(1,(v,m)),(2,(v,m)),(3,(v,m)), \\ &(1,(v,n)),(2,(v,n)),(3,(v,n))\} \end{aligned}$$

4. Prove que para todos os conjuntos A e B, $B - A = B \cap A^c$.

   Resposta:
   Prova que $B - A \subseteq B \cap A^c$:

   – Suponha $x \in B - A$.
   – Pela definição de diferença de conjuntos, $x \in B$ e $x \notin A$.
   – Pela definição de complemento, $x \in B$ e $x \in A^c$.
   – Pela definição de intersecção $x \in B \cap A^c$.
   – Assim, pela definição de subconjunto, $B - A \subseteq B \cap A^c$.

Prova que $B \cap A^c \subseteq B - A$:

– Suponha $x \in B \cap A^c$.
– Pela definição de intersecção, $x \in B$ e $x \in A^c$.
– Pela definição de complemento, $x \in B$ e $x \notin A$.
– Pela definição de diferença de conjuntos, $x \in B$ e $x \notin A$.
– Assim, pela definição de subconjunto, $B \cap A^c \subseteq B - A$.

Como $B - A \subseteq B \cap A^c$ e $B \cap A^c \subseteq B - A$ temos que $B - A = B \cap A^c$.

5. Prove por indução matemática que para todo inteiro $n \geq 1$ e todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B,

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) - B$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, a fórmula é expressa como $A_1 - B = A_1 - B$, que é claramente verdadeira. Logo, o passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_k - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k) - B$$

– Deve-se mostrar que:

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_{k+1} - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{k+1}) - B$$

Tem-se que:

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_{k+1} - B)$$

Que pode ser reescrito como:

$$[(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_k - B)] \cup (A_{k+1} - B) =$$

Pela hipótese indutiva temos:

$$[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k) - B] \cup (A_{k+1} - B)$$

Pela propriedade de diferença, ou seja, $(X - Z) \cup (Y - Z) = (X \cup Y) - Z$, para conjuntos X, Y e Z, tem-se que:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k \cup A_{k+1}) - B$$

6. Prove que para todos os conjuntos A, B e C, $(A - B) - (B - C) = A - B$.

Resposta:
A expressão $(A - B) - (B - C)$ pode ser expressa como

$(A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)^c$	Representação alternativa para diferença
$(A \cap B^c) \cap (B^c \cup C)$	De Morgan
$((A \cap B^c) \cap B^c) \cup ((A \cap B^c) \cap C)$	Distributividade
$(A \cap (B^c \cap B^c)) \cup (A \cap (B^c \cap C))$	Associatividade
$(A \cap B^c) \cup (A \cap (B^c \cap C))$	Lei da interseção
$(A \cap B^c) \cup (A \cap (C \cap B^c))$	Comutatividade
$(A \cap B^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c)$	Associatividade
$(B^c \cap A) \cup (B^c \cap (A \cap C))$	Comutatividade
$B^c \cap (A \cup (A \cap C))$	Distributividade
$B^c \cap A$	Absorção
$A \cap B^c$	Comutatividade
$A - B$	Representação alternativa para diferença

7. Dados dois conjuntos A e B, defina a "diferença simétrica" de A e B, representada por $A \oplus B$, como

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Prove se $A \oplus B = B \oplus A$.

<u>**Resposta**</u>:

– Sejam A e B conjuntos quaisquer.
– Pela definição de $\oplus$, mostrar que $A \oplus B = B \oplus A$ é equivalente a mostrar que

$$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$$

– Esta igualdade é obtida diretamente da comutatividade da $\cup$.

8. Prove se para todos os conjuntos A, B e C, $(A - B)$ e $(C - B)$ são necessariamente disjuntos.

<u>**Resposta**</u>:
Não, ou seja, $(A - B) \cap (C - B) \neq \emptyset$.

– Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{1, 4\}$.
– Tem-se que $A - B = \{1, 2\}$.
– Tem-se que $C - B = \{1, 4\}$.
– No entanto, $(A - B) \cap (C - B) = \{1\} \neq \emptyset$, ou seja, a intersecção não é um conjunto vazio.

9. Sejam os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{u, v\}$. Determine o conjunto potência de $A \times B$, i.e., $\mathcal{P}(A \times B)$.

<u>**Resposta**</u>:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, u), (1, v)\} \\ \mathcal{P}(A \times B) &= \{\emptyset, \{(1, u)\}, \{(1, v)\}, \{(1, u), (1, v)\}\} \end{aligned}$$

10. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))$.

<u>**Resposta**</u>:
O conjunto potência do conjunto $\{\emptyset\}$ tem os dois elementos ($2^1 = 2$) abaixo, i.e., o conjunto vazio e um subconjunto que tem um elemento que é o conjunto vazio.

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\underset{1}{\emptyset}, \underset{2}{\{\emptyset\}}\}$$

O conjunto potência do conjunto potência do conjunto $\{\emptyset\}$ tem os quatro elementos ($2^2 = 4$) abaixo: o conjunto vazio e elementos formados a partir do conjunto $\{\underset{1}{\emptyset}, \underset{2}{\{\emptyset\}}\}$, ou seja, um subconjunto formado pelo primeiro elemento, um subconjunto formado pelo segundo elemento e um subconjunto com os dois elementos.

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\underset{1}{\emptyset}, \underset{2}{\{\emptyset\}}, \underset{3}{\{\{\emptyset\}\}}, \underset{4}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}\}$$

O conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))$ tem os 16 elementos ($2^4 = 4$) abaixo: o conjunto vazio e 15 elementos formados a partir do conjunto $\{\underset{1}{\emptyset}, \underset{2}{\{\emptyset\}}, \underset{3}{\{\{\emptyset\}\}}, \underset{4}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}\}$. Esses 15 elementos são obtidos da seguinte forma:

– quatro subconjuntos unitários, cada um formado a partir dos conjuntos 1, 2, 3 e 4 acima;
– seis subconjuntos de cardinalidade dois, cada um formado a partir dos conjuntos [1 e 2], [1 e 3], [1 e 4], [2 e 3], [2 e 4], [3 e 4];
– quatro subconjuntos de cardinalidade três, cada um formado a partir dos conjuntos [1, 2 e 3], [1, 2 e 4], [1, 3 e 4], [2, 3 e 4];
– um subconjunto de cardinalidade quatro com os quatro conjuntos [1, 2, 3 e 4];

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))) \quad = \quad & \{\underset{1}{\emptyset}, \\
& \underset{2}{\{\emptyset\}}, \underset{3}{\{\{\emptyset\}\}}, \underset{4}{\{\{\{\emptyset\}\}\}}, \underset{5}{\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{6}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}, \underset{7}{\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}}, \underset{8}{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{9}{\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}}, \underset{10}{\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{11}{\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{12}{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}}, \underset{13}{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{14}{\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{15}{\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \\
& \underset{16}{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}\}
\end{aligned}
$$

11. Seja $A = \{x, y\}$. Determine:

(a) $A \cap \mathcal{P}(A)$

Resposta:

O conjunto $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$. Assim, devemos identificar os elementos em comum de A e $\mathcal{P}(A)$. Basicamente, o algoritmo a ser seguido é avaliar, para cada elemento de A, se ele também pertence ao conjunto $\mathcal{P}(A)$. Por exemplo, temos que $x \in A$. A questão é $x \in \mathcal{P}(A)$? Para respondermos a essa pergunta, devemos comparar x a cada elemento de $\mathcal{P}(A)$. Ou seja,

1. $x \stackrel{?}{=} \emptyset$
2. $x \stackrel{?}{=} \{x\}$
3. $x \stackrel{?}{=} \{y\}$
4. $x \stackrel{?}{=} \{x, y\}$

Claramente, a resposta é falsa para todas as linhas já que em cada caso estamos comparando um elemento a um conjunto, inclusive na linha 2 (o elemento x não é igual ao conjunto $\{x\}$). Logo, a interseção dos conjuntos A e $\mathcal{P}(A)$ tem como resultado o conjunto vazio, i.e., $A \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset$.

(b) $(\mathcal{P}(A) - A) \cap A$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) - A &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} - \{x, y\} \\
&= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}(A) - A) \cap A &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} \cap \{x, y\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

(c) $\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(A) - \{\{x\}\}\} - \emptyset)$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(A) - \{\{x\}\}\} - \emptyset) &= \mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} - \{\{x\}\}\} - \emptyset) \\
&= \mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}\} - \emptyset) \\
&= \mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}\}) \\
&= \{\emptyset, \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}\}
\end{aligned}
$$

12. Prove que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ usando apenas as propriedades de conjuntos (sem usar diagrama de Venn). (Lembre-se que dados dois conjuntos A e B, $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, ou seja, a prova deve ser feita em duas partes.)

    Resposta:
    A prova deve ser dividida em duas partes:

    (a) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
    Suponha que exista um elemento x contido no conjunto resultante de $A \cup (B \cap C)$. Pela definição da união temos duas possibilidades:

    (a) $x \in A$, ou
    (b) $x \in (B \cap C)$, i.e., $x \in B$ e $x \in C$.

    Deve-se provar que x está contido no conjunto resultante de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Para x estar contido nesse conjunto resultante, $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$. No primeiro caso, se $x \in A$ então x estará na interseção dos dois termos, i.e., caso (a) acima. Se $x \notin A$, x deve pertencer simultaneamente a B e a C para estar na interseção dos dois termos, i.e., caso (b) acima. Assim, se x é um elemento presente no conjunto resultante de $A \cup (B \cap C)$ então x estará presente no conjunto resultante de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

    (b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.
    Suponha que exista um elemento x contido no conjunto resultante de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Pela definição de interseção temos que:

    (a) $x \in A$ ou $x \in B$, e
    (b) $x \in A$ ou $x \in C$.

    Isto significa que x pertence a A ou x pertence simultaneamente a B e a C. Deve-se provar que x está contido no conjunto resultante de $A \cup (B \cap C)$. Para x estar contido nesse conjunto resultante, $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$. Mas essas duas condições representam exatamente a hipótese feita.

13. Simplifique as seguintes expressões usando apenas as propriedades de conjuntos:

    (a) $((A \cap (B \cup C)) \cap (A - B)) \cap (B \cup C^c)$
    Resposta:
    $(((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap (A \cap B^c)) \cap (B \cup C^c)$
    $((A \cap B^c) \cap (A \cap B)) \cup ((A \cap B^c) \cap (A \cap C))) \cap (B \cup C^c)$
    $(A \cup (A \cap B^c \cap C)) \cap (B \cup C^c)$
    $A \cap (B \cup C^c)$

    (b) $(A - (A \cap B)) \cap (B - (A \cap B))$
    Resposta:
    $((A - A) \cup (A - B)) \cap ((B - A) \cup (B - B))$
    $(A - B) \cap (B - A)$
    $A \cap B^c \cap B \cap A^c$
    $\emptyset$

14. Sejam os conjuntos A, B e C. Sabe-se que $A \subseteq B$ e os conjuntos B e C são disjuntos, mas A e C têm elementos em comum. Esboce, se for possível, o diagrama de Venn desses conjuntos.

    Resposta:
    Prova (por contradição):

    Suponha que sim, que é possível fazer esse diagrama. Suponha que x é o elemento em comum dos conjuntos A e C. Sabe-se que $A \subseteq B$. Assim, o elemento x deve também pertencer a B. Logo, B e C também devem ter um elemento em comum, o que contradiz a afirmação que esses conjuntos são disjuntos. Consequentemente, não existe tal diagrama de Venn.