UFMG/ICEx/DCC | DCC111 – Matemática Discreta

# Lista de Exercícios 6
## Funções

Ciências Exatas & Engenharias | 1º Semestre de 2018

### Conceitos

1. Determine e justifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou não para todas as funções $f$ de um conjunto $X$ para um conjunto $Y$: para todos sub-conjuntos $A$ e $B$ de $X$, se $A \subseteq B$, então $f(A) \subseteq f(B)$.

2. Determine e justifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou não, para todas as funções $f$ de um conjunto $X$ para um conjunto $Y$: para todos sub-conjuntos $A$ e $B$ de $X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

3. A definição de função injetiva ou um-para-um pode ser dada de duas formas:
$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ se } f(x_1) = f(x_2) \text{ então } x_1 = x_2$$
e
$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ se } x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$
Porque estas duas definições são logicamente equivalentes?

### Sequência como função

4. Apresente uma função definida no conjunto dos inteiros não negativos que construa a seqüência abaixo:
$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \ldots$$

### Princípio da casa de pombo

5. Seja $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Suponha que seis inteiros sejam escolhidos de $S$. Existem dois inteiros cuja soma é 15? Justifique sua resposta.

6. Quantos inteiros devem ser escolhidos aleatoriamente para se ter certeza que pelo menos dois deles têm o mesmo resto quando divididos por 7? Justifique sua resposta.

7. Mostre que para qualquer conjunto de 13 números escolhidos no intervalo $[2, 40]$, existem pelo menos dois inteiros com um divisor comum maior que 1.

8. Suponha um grupo de 40 pessoas, todas na faixa de 17 a 34 anos. Você quer fazer uma aposta que o grupo possui pelo menos $x$ pessoas com a mesma idade. Qual é o maior valor de $x$ que você pode apostar com certeza para vencer a aposta?

9. Um grupo de 15 executivos usará os serviços de cinco assistentes. Cada executivo tem exatamente um assistente e nenhum assistente trabalha para mais de quatro executivos. Mostre que pelo menos três assistentes trabalham para três ou mais executivos.

10. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é diretamente conectado a zero ou mais computadores. Mostre que existem pelo menos dois computadores na rede que possuem o mesmo número de conexões, ou seja, estão conectados diretamente ao mesmo número de outros computadores.

11. Dezenove pessoas têm o primeiro nome Zeca, Wally e Linda, o segundo nome Lucas e Davi, e o último nome Yu, Zamora e Santos. Mostre que pelo menos duas pessoas têm os mesmos três nomes.

12. Sejam cinco pontos distintos no plano, todos com coordenadas inteiras. Mostre que algum par de pontos tem um ponto intermediário que também tem coordenadas inteiras. (O ponto intermediário é obtido tomando as médias das coordenadas $x$ e $y$.)

**Função de complexidade**

13. Sejam as seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} g_1 = n^{\frac{1}{\log n}} & g_2 = \ln \ln n & g_3 = (\ln n)^2 & g_4 = n \\ g_5 = 2^{\log n} & g_6 = n \log n & g_7 = \log(n!) & g_8 = n^2 \\ g_9 = 4^{\log n} & g_{10} = (\frac{3}{2})^n & g_{11} = 2^n & g_{12} = e^n \end{array}$$

e os seguintes fatos ($a > 0, b > 0, c > 0, n \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rclrcl} \log n & = & \log_2 n & \ln n & = & \log_e n \\ a & = & b^{\log_b a} & \log_c(ab) & = & \log_c a + \log_c b \\ \log_b a^n & = & n \log_b a & \log_b a & = & \frac{\log_c a}{\log_c b} \\ \log_b a & = & \frac{1}{\log_a b} & a^{\log_b n} & = & n^{\log_b a} \\ n^{\frac{1}{\log n}} & = & n^{\log_n 2} = 2 & 2^{\log n} & = & n \\ 4^{\log n} & = & 2^{2 \log n} = 2^{\log n^2} = n^2 & n! & \sim & (\frac{n}{e})^n \\ & & & \log(n!) & = & \Theta(n \log n) \end{array}$$

Mostre para cada par de funções $g_i$ e $g_{i+1}$ para $1 \leq i \leq 11$ se $g_i$ é $O$ ou $\Theta$ de $g_{i+1}$.

14. A seguinte hierarquia de funções pode ser definida do ponto de vista assintótico:

$$1 \prec \log \log n \prec \log n \prec n^{\epsilon} \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}$$

Indique, para cada par de expressões $(A, B)$ na tabela abaixo, se a função $A$ é $O, o, \Omega, \omega$ ou $\Theta$ da função $B$. Assuma que $k \geq 1$ e $0 < \epsilon < 1 < c$ são constantes. Sua resposta deve ser da forma SIM ou NÃO.
Nota: $\log^k n \equiv \underbrace{\log \log \ldots}_{k} n$. Na letra (v), $m$ é um número inteiro positivo.

| | $A$ | $B$ | $O$ | $o$ | $\Omega$ | $\omega$ | $\Theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (i) | $log^k n$ | $n^{\epsilon}$ | | | | | |
| (ii) | $n^k$ | $c^n$ | | | | | |
| (iii) | $\sqrt{n}$ | $n^{\sin n}$ | | | | | |
| (iv) | $2^n$ | $2^{n/2}$ | | | | | |
| (v) | $n^{\log m}$ | $m^{\log n}$ | | | | | |
| (vi) | $\log(n!)$ | $\log(n^n)$ | | | | | |

15. Usando a definição formal de $\Theta$ prove que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$.

16. O que significa um algoritmo ser $O(2)$ ou $O(5)$?

17. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$.

18. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$.

19. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$.

20. O tempo de execução de um algoritmo $A$ é descrito pela recorrência

$$T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}) + n^2.$$

Um outro algoritmo $A'$ tem um tempo de execução descrito pela recorrência

$$T'(n) = aT'(\tfrac{n}{4}) + n^2.$$

Qual é o maior valor inteiro de $a$ tal que $A'$ é assintoticamente mais rápido que $A$?

**Observações**: Para os exercícios 21 a 65 considere que:

(a) todas as variáveis e constantes são inteiras e positivas, a menos que sejam explicitamente identificadas de outra forma;

(b) as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico;

(c) $p(n) = \sum_{i=0}^{g} a_i n^i$ é um polinômio de grau $g$, as constantes $a_i$ $(1 \le i \le g)$ reais, sendo $a_g \ne 0$, e $k$ uma constante.

Para cada afirmação nos exercícios 21 a 65, diga se é verdadeira ou falsa, provando ou fornecendo um contra-exemplo:

21. Se $k \ge g$, então $p(n) = O(n^k)$.
22. Se $k \le g$, então $p(n) = \Omega(n^k)$.
23. Se $k = g$, então $p(n) = \Theta(n^k)$.
24. Se $k > g$, então $p(n) = o(n^k)$.
25. Se $k < g$, então $p(n) = \omega(n^k)$.
26. Se $k \ge g$, então $p(n) = O(n^g)$.
27. Se $k \le g$, então $p(n) = \Omega(n^g)$.
28. Se $k = g$, então $p(n) = \Theta(n^g)$.
29. Se $k > g$, então $p(n) = o(n^g)$.
30. Se $k < g$, então $p(n) = \omega(n^g)$.
31. $f(n) = O(g(n))$ implica em $g(n) = O(f(n))$.
32. É possível achar funções $f(n)$ e $g(n)$ tais que $f(n) = \Theta(g(n))$.
33. $f(n) + g(n) = \Omega(f(n))$.
34. $f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$.
35. $f(n) + g(n) = O(f(n))$.
36. $f(n) + g(n) = \Omega(g(n))$.
37. $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$.
38. $f(n) + g(n) = O(g(n))$.
39. $f(n) = \Omega((f(n))^2)$.
40. $f(n) = \Theta((f(n))^2)$.
41. $f(n) = O((f(n))^2)$.
42. $g(n) = \Omega(f(n))$.

43. $g(n) = \Theta(f(n))$.

44. $g(n) = O(f(n))$.

45. $g(n) = \Omega(\frac{g(n)}{2})$.

46. $g(n) = \Theta(\frac{g(n)}{2})$.

47. $g(n) = O(\frac{g(n)}{2})$.

48. $f(n) = \omega(g(n))$.

49. $f(n) = \omega(\frac{g(n)}{2})$.

50. $f(n) = o(g(n))$.

51. $n^2 + 10^{10^{100}} n + 123 = O(n)$.

52. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + \Omega(n)$.

53. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + \Theta(1)$.

54. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + O(n)$.

55. $\binom{n}{2} = O(n^2)$.

56. $\binom{n}{3} = O(n^3)$.

57. Seja $\Omega(n^2 \log n) = X$, onde $X$ representa o conjunto de funções que satisfaz a notação $\Omega$ para a função $n^2 \log n$. O conjunto $\{n^{1.5} \log n, n^e \log n, n^2 \ln n, \log\log n,\ n^2, n^{2.5}\} \subset X$?, onde $e$ é a constante de Euler e ln é o logaritmo na base $e$.

58. Seja $\Theta(1) = X$, onde $X$ representa o conjunto de funções que satisfaz a notação $\Theta$ para a função 1. O conjunto $\{\pi, n^{\log_\pi 1}, e, 2^{\lfloor \pi/4 \rfloor n}\} \subset X$?, onde $e$ é a constante de Euler.

59. Seja $O(n^e) = X$, onde $X$ representa o conjunto de funções que satisfaz a notação $O$ para a função $n^e$. O conjunto $\{n^2, n \log n^2, n^{\frac{\pi}{2}} \log n^2, \frac{1}{n^e}\} \subset X$?, onde $e$ é a constante de Euler.

60. Seja $\omega(n) = X$, onde $X$ representa o conjunto de funções que satisfaz a notação $\omega$ para a função $n$. O conjunto $\{n^{1.5} \log n, n^e \log n, n^2 \ln n, \log\log n, n^2, n^{1.1}\} \subset X$?, onde $e$ é a constante de Euler e ln é o logaritmo na base $e$.

61. Seja $o(n^e) = X$, onde $X$ representa o conjunto de funções que satisfaz a notação $o$ para a função $n^e$. O conjunto $\{n^2, n \log n^2, n^{\frac{\pi}{2}} \log n^2, \frac{1}{n^e}\} \subset X$?, onde $e$ é a constante de Euler.

62. A derivada de $h(n) = n^2$ é $h'(n) = 2n$. A derivada de $l(n) = 4n^2 + 2n$ é $l'(n) = 8n + 2$. Como $2n < 8n + 2$, $\forall\, n \geq 0$, $h(n)$ cresce mais lentamente que $l(n)$ e, portanto, $h(n) = O(l(n))$.

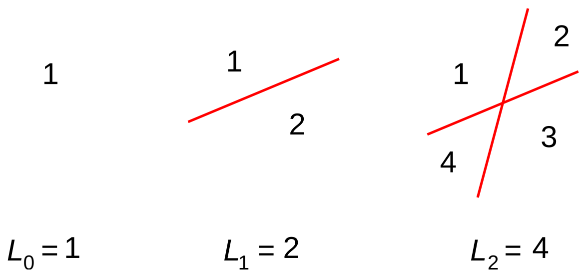
63. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral
$$T(n) = p^q\, T(\tfrac{n}{p}) + n,$$
onde $p$ e $q$ são constantes inteiras positivas maiores que 1.

64. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral
$$T(n) = T(\tfrac{pn}{q}) + k,$$
onde $p$, $q$ e $k$ são constantes inteiras positivas maiores que 1 e $q > p$.

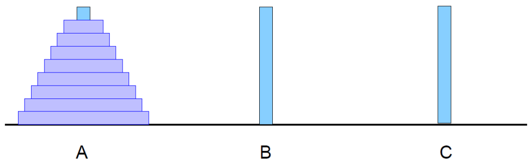
65. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral
$$T(n) = p\, T(\tfrac{n}{q}) + n \log n,$$
onde $p$ e $q$ são constantes inteiras positivas, sendo $p < q$ e $p \geq 2$.

**Modelagem usando funções de recorrência**

66. Qual é o número máximo de regiões $L_n$ determinado por $n$ retas no plano? Lembre-se que um plano sem nenhuma reta tem uma região, com uma reta tem duas regiões e com duas retas têm quatro regiões, conforme ilustrado abaixo.




67. O problema da Torre de Hanoi com requisito de adjacência. Sejam discos de tamanhos diferentes e três varetas, como ilustrado abaixo com oito discos. O jogo começa com o conjunto de discos empilhados em tamanho decrescente na vareta A.




O objetivo é transferir toda a torre da vareta A para a vareta C, movendo um disco de cada vez para uma *vareta adjacente* e nunca movendo um disco maior sobre um menor. Quantos movimentos são necessários para mover $n$ discos da vareta A para a vareta C? Observe que a vareta A é adjacente a B que é adjacente a C. No entanto, a vareta A não é adjacente à vareta C.