UFMG/ICEx/DCC — DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 6: Soluções
Funções

Ciências Exatas & Engenharias — 1º Semestre de 2018

Conceitos

1. Determine e justifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou não para todas as funções f de um conjunto X para um conjunto Y: para todos sub-conjuntos A e B de X, se $A \subseteq B$, então $f(A) \subseteq f(B)$.

   Resposta:
   A afirmação é verdadeira. Prova: Seja f uma função de X para Y e suponha $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ e $A \subseteq B$. Seja $y \in f(A)$. [Devemos mostrar que $y \in f(B)$]. Pela definição de imagem de um conjunto, $y = f(x)$ para algum $x \in A$. Como $A \subseteq B$, $x \in B$ e, assim, $y = f(x)$ para algum $x \in B$. Consequentemente, $y \in f(B)$ [o que devia ser mostrado].

2. Determine e justifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou não, para todas as funções f de um conjunto X para um conjunto Y: para todos sub-conjuntos A e B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Resposta:
   A afirmação é falsa. Prova [por contra-exemplo]: Seja $X = \{1, 2, 3\}$ e seja $Y = \{a, b\}$. A função $f : X \to Y$ é definida pelos seguintes pares ordenados:

   $$\{(1, a), (2, b), (3, b)\}.$$

   Seja $A = \{1, 2\}$ e seja $B = \{1, 3\}$. Temos que $f(A) = \{a, b\} = f(B)$ e, assim $f(A) \cap f(B) = \{a, b\}$. Mas $f(A \cap B) = f(\{1\}) = \{a\} \neq \{a, b\}$. Assim, $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

3. A definição de função injetiva ou um-para-um pode ser dada de duas formas:

   $$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ se } f(x_1) = f(x_2) \text{ então } x_1 = x_2$$

   e

   $$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ se } x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$

   Porque estas duas definições são logicamente equivalentes?

   Resposta:
   A segunda definição é a forma contrapositiva da primeira.

Sequência como função

4. Apresente uma função definida no conjunto dos inteiros não negativos que construa a seqüência abaixo:

   $$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \ldots$$

   Resposta:
   Seja $\mathbb{Z}^* = 0 \cup \mathbb{Z}^+$. A seqüência pode ser construída pela função $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ definida como:

   $$f(n) = \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

   para todos os inteiros não negativos n.

Princípio da casa de pombo

5. Seja $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Suponha que seis inteiros sejam escolhidos de S. Existem dois inteiros cuja soma é 15? Justifique sua resposta.

   Resposta:
   Sim. Seja Y o conjunto de todos os pares de inteiros de S que somam 15. Existem cinco elementos em Y, ou seja, $Y = \{\{3, 12\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}\}$, e cada inteiro de S ocorre em exatamente um par. Seja X o conjunto de seis inteiros escolhidos de S e considere a função de X para Y definida pela regra: $P(x) =$ o par para o qual x pertence. Como X tem seis elementos e Y tem cinco elementos e $6 > 5$, então pelo princípio da casa de pombo, P não é uma função injetiva. Assim, $P(x_1) = P(x_2)$ para alguns inteiros x_1 e x_2 em X com $x_1 \neq x_2$. Isto significa que x_1 e x_2 são inteiros distintos no mesmo pair, o que implica $x_1 + x_2 = 15$.

6. Quantos inteiros devem ser escolhidos aleatoriamente para se ter certeza que pelo menos dois deles têm o mesmo resto quando divididos por 7? Justifique sua resposta.

   Resposta:
   Qualquer número inteiro quando dividido por 7 pode deixar como resto $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Assim, podem ser escolhidos sete números que deixam um resto diferente. Ao se pegar um oitavo número, teremos pelo menos dois números que deixam o mesmo resto.

7. Mostre que para qualquer conjunto de 13 números escolhidos no intervalo $[2, 40]$, existem pelo menos dois inteiros com um divisor comum maior que 1.

   Resposta:
   Seja A o conjunto de 13 números escolhidos e seja B o conjunto de todos os números primos no intervalo $[2, 40]$, ou seja, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$. Para cada x em A, seja $F(x)$ o menor número primo que divide x. Como A tem 13 elementos e B tem 12 elementos, pelo princípio da casa de pombo, F não é uma função injetiva. Assim, $F(x_1) = F(x_2)$ para algum $x_1 \neq x_2$ em A. Pela definição de F, isto significa que o menor número primo que divide x_1 é igual ao menor número primo que divide x_2. Assim, dois números em A, x_1 e x_2, tem um divisor comum maior que 1.

8. Suponha um grupo de 40 pessoas, todas na faixa de 17 a 34 anos. Você quer fazer uma aposta que o grupo possui pelo menos x pessoas com a mesma idade. Qual é o maior valor de x que você pode apostar com certeza para vencer a aposta?

   Resposta:
   No intervalo de 17 a 34, temos 18 anos. Como $40 > 18 \times 2$, pelo princípio da casa de pombo existem pelo menos $x = 3$ pessoas da mesma idade. Como $18 \times 3 > 40$, não é possível garantir que mais que três pessoas têm a mesma idade. Assim, x deve ser 3.

9. Um grupo de 15 executivos usará os serviços de cinco assistentes. Cada executivo tem exatamente um assistente e nenhum assistente trabalha para mais de quatro executivos. Mostre que pelo menos três assistentes trabalham para três ou mais executivos.

   Resposta:
   Seja k o número de assistentes que trabalham para três ou mais executivos. Como nenhum assistente trabalha para mais que quatro executivos, estes assistentes trabalham para no máximo $4k$ executivos. Cada um dos outros $5-k$ assistentes trabalham para no máximo dois executivos. Assim, estes assistentes trabalham para no máximo $2(5-k) = 10 - 2k$ executivos. Assim, o número máximo de executivos que têm assistentes é $4k + (10-2k) = 10+2k$. Neste caso, temos 15 executivos com assistentes, ou seja, $15 \leq 10+2k$, or $k \geq 5/2$. Como k é um número inteiro temos que $k \geq 3$. Assim, pelo menos três assistentes trabalham para três ou mais executivos.

10. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é diretamente conectado a zero ou mais computadores. Mostre que existem pelo menos dois computadores na rede que possuem o mesmo número de conexões, ou seja, estão conectados diretamente ao mesmo número de outros computadores.

    Resposta:
    Cada computador pode estar conectado a zero, um, dois, etc., até cinco computadores, já que existem seis computadores. No entanto, podemos observar que simultaneamente não podemos ter um computador conectado a nenhum outro (zero conexões) e um outro conectado a cinco computadores (todos os outros). (Se um computador não está conectado a nenhum computador então nenhum outro computador está conectado

a todos os cinco; e se um computador está conectado a todos os cinco então nenhum computador está sem conexão.) Assim, temos cinco possibilidades para o número de conexões e seis computadores. Pelo princípio da casa de pombo, temos pelo menos dois computadores que possuem o mesmo número de conexões.

11. Dezenove pessoas têm o primeiro nome Zeca, Wally e Linda, o segundo nome Lucas e Davi, e o último nome Yu, Zamora e Santos. Mostre que pelo menos duas pessoas têm os mesmos três nomes.

    Resposta:
    O número total de combinações de nomes diferentes é dado por

$$\underbrace{3}_{\substack{\#\text{ possibilidades para}\\ \text{o primeiro nome}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\#\text{ possibilidades para}\\ \text{o segundo nome}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\#\text{ possibilidades para}\\ \text{o terceiro nome}}} = 18$$

    Como existem 19 pessoas e 18 possibilidades de nomes diferentes, pelo princípio da casa de pombo existem pelo menos duas pessoas que têm os mesmos três nomes.

12. Sejam cinco pontos distintos no plano, todos com coordenadas inteiras. Mostre que algum par de pontos tem um ponto intermediário que também tem coordenadas inteiras. (O ponto intermediário é obtido tomando as médias das coordenadas x e y.)

    Resposta:
    A coordenada x de cada ponto é um número par ou ímpar. O mesmo vale para a coordenada y. Se tomarmos dois pontos quaisquer, temos quatro possibilidades diferentes de tipos de coordenadas para esses pontos. Como existem cinco pontos e quatro possibilidades temos que pelo menos dois pontos $p_i = (x_i, y_i)$ e $p_j = (x_j, y_j)$ têm:

    – Ambos x_i e x_j pares ou ambos x_i e x_j ímpares, e
    – Ambos y_i e y_j pares ou ambos y_i e y_j ímpares.

    Assim, $x_i + x_j$ é par e $y_i + y_j$ também é par e, consequentemente, o ponto intermediário $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$ também tem coordenadas inteiras.

Função de complexidade

13. Sejam as seguintes funções:

$$\begin{array}{llll} g_1 = n^{\frac{1}{\log n}} & g_2 = \ln\ln n & g_3 = (\ln n)^2 & g_4 = n \\ g_5 = 2^{\log n} & g_6 = n\log n & g_7 = \log(n!) & g_8 = n^2 \\ g_9 = 4^{\log n} & g_{10} = (\frac{3}{2})^n & g_{11} = 2^n & g_{12} = e^n \end{array}$$

    e os seguintes fatos ($a > 0, b > 0, c > 0, n \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcl} \log n &=& \log_2 n \\ a &=& b^{\log_b a} \\ \log_b a^n &=& n\log_b a \\ \log_b a &=& \frac{1}{\log_a b} \\ n^{\frac{1}{\log n}} &=& n^{\log_n 2} = 2 \\ 4^{\log n} &=& 2^{2\log n} = 2^{\log n^2} = n^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \ln n &=& \log_e n \\ \log_c(ab) &=& \log_c a + \log_c b \\ \log_b a &=& \frac{\log_c a}{\log_c b} \\ a^{\log_b n} &=& n^{\log_b a} \\ 2^{\log n} &=& n \\ n! &\sim& (\frac{n}{e})^n \\ \log(n!) &=& \Theta(n\log n) \end{array}$$

    Mostre para cada par de funções g_i e g_{i+1} para $1 \leq i \leq 11$ se g_i é O ou Θ de g_{i+1}.

    Resposta:
    Algumas simplificações:

$$g_1 = n^{\frac{1}{\log n}} = n^{\log_n 2} = 2$$

$$
\begin{aligned}
g_5 &= 2^{\log n} = n \\
g_7 &= \log(n!) = \Theta(n \log n) \\
g_9 &= 4^{\log n} = (2^2)^{\log n} = 2^{\log n^2} = n^2
\end{aligned}
$$

Logo, baseado nas simplificações acima, o seguinte crescimento assintótico pode ser definido:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= O(g_2) \\
g_2 &= O(g_3) \\
g_3 &= O(g_4) \\
g_4 &= \Theta(g_5) \\
g_5 &= O(g_6) \\
g_6 &= \Theta(g_7) \\
g_7 &= O(g_8) \\
g_8 &= \Theta(g_9) \\
g_9 &= O(g_{10}) \\
g_{10} &= O(g_{11}) \\
g_{11} &= O(g_{12})
\end{aligned}
$$

14. A seguinte hierarquia de funções pode ser definida do ponto de vista assintótico:

$$1 \prec \log \log n \prec \log n \prec n^\epsilon \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}$$

Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo, se a função A é O, o, Ω, ω ou Θ da função B. Assuma que $k \geq 1$ e $0 < \epsilon < 1 < c$ são constantes. Sua resposta deve ser da forma SIM ou NÃO.

Nota: $\log^k n \equiv \underbrace{\log \log \dots}_{k} n$. Na letra (v), m é um número inteiro positivo.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(i)	$log^k n$	n^ϵ					
(ii)	n^k	c^n					
(iii)	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
(iv)	2^n	$2^{n/2}$					
(v)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
(vi)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

Resposta:

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(i)	$log^k n$	n^ϵ	S	S	N	N	N
(ii)	n^k	c^n	S	S	N	N	N
(iii)	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	N	N	N	N	N
(iv)	2^n	$2^{n/2}$	N	N	S	S	N
(v)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	S	N	S	N	S
(vi)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$	S	N	S	N	S

Comentários:

(i) Direto da hierarquia: $log^k n \prec n^\epsilon$. Logo $log^k n$ não pode ser Ω, ω ou Θ de n^ϵ. Lembre que se $f(n) = \Theta(g(n))$ então $f(n) = \Omega(g(n))$ $\underline{\mathbf{e}}$ $f(n) = O(g(n))$.

(ii) Direto da hierarquia: $n^k \prec c^n$. Mesma explicação de (i).

(iii) $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$ e $n^{\sin n} = n^\alpha$, onde α é um valor no intervalo $[-1, 1]$. Logo, $\sqrt{n}$ não é O, o, Ω, ω ou Θ de $n^{\sin n}$.

(iv) $2^n \stackrel{?}{=} 2^{n/2}$. Se esta afirmativa é verdadeira então

$$2^n \leq c.2^{n/2} \Rightarrow c \geq 2^{n/2}$$

Quando n cresce não existe nenhuma constante c que seja maior que $2^{n/2}$. Logo, $2^n \neq O(2^{n/2})$. Como consequência disso, também não será nem o nem Θ. No entanto, existe uma constante c tal que $c.2^{n/2} \leq 2^n$. Por exemplo, $c = 1$ e $n \geq 2$. Logo, $2^n = \Omega(2^{n/2})$. Para saber se também é ω basta verificar se o seguinte limite é verdadeiro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} \stackrel{?}{=} 0$$

Pode-se verificar que este limite é de fato 0, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/2}} = 0$.

(v) Seja $b, (b \geq 2)$ a base do logaritmo usada neste exercício. Seja $\log_n b = c$. Então,

$$n^{\log_b m} = n^{\frac{\log_n m}{\log_n b}} = n^{\frac{1}{c}\cdot \log_n m} = n^{\log_n m^{1/c}} = m^{\frac{1}{c}}$$

Da mesma forma,

$$m^{\log_b n} = m^{\frac{1}{\log_n b}} = m^{\frac{1}{c}}$$

Ou seja, independente da base do logaritmo, $n^{\log m} = m^{\log n}$. Logo, $n^{\log m}$ é O, Ω e Θ de $m^{\log n}$. Consequentemente, não pode ser nem o nem ω.

(vi) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$ e $\log(n^n) = n \log n$. Logo, $\log(n!)$ é O, Ω e Θ de $\log(n^n)$. Da mesma forma, não pode ser nem o nem ω.

15. Usando a definição formal de Θ prove que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$.

Resposta:
Suponha que não, ou seja, suponha que $6n^3 = \Theta(n^2)$. Assim, pela definição formal da notação Θ, existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, temos que $f(n) = 6n^3$, $g(n) = n^2$ e

$$c_1 n^2 \leq 6n^3 \leq c_2 n^2.$$

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n^2, temos:

$$c_1 \leq 6n \leq c_2.$$

Não existem constantes positivas $c_2 > 0$ e n_0 tais que $6n \leq c_2$ para todo $n \geq n_0$. Assim, a suposição original que é verdadeira, ou seja, $6n^3 \neq \Theta(n^2)$.

16. O que significa um algoritmo ser $O(2)$ ou $O(5)$?

Resposta:
Significa que independentemente do tamanho da entrada n, o tempo de execução do algoritmo será constante. Observe que se $f(n) = O(k)$ para uma função constante k, temos que:

$$f(n) \leq c \cdot k.$$

Se a constante k é 1 ou 2 ou 5 isso é indiferente pois a função $f(n)$ sempre será limitada por uma constante c vezes uma outra constante k.

17. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$.

Resposta:
Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Temos $a = 4, b = 2, f(n) = n$ e as três condições são satisfeitas.

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(n) &: n^{\log_b a} \\ n &: n^{\log_2 4} \\ n &: n^2. \end{aligned}$$

A função $n^{\log_b a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial n^1. Assim, o caso 1 do Teorema Mestre se aplica e temos que $T(n) = \Theta(n^2)$.

18. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$.

Resposta:
Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Temos $a = 4, b = 2, f(n) = n^2$ e as três condições são satisfeitas.

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(n) &: n^{\log_b a} \\ n^2 &: n^{\log_2 4} \\ n^2 &: n^2. \end{aligned}$$

As duas funções $f(n)$ e $n^{\log_b a}$ têm a mesma taxa de crescimento. Assim, o caso 2 do Teorema Mestre se aplica e temos que $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

19. Use o Teorema Mestre para resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$.

Resposta:
Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Temos $a = 4, b = 2, f(n) = n^3$ e as três condições são satisfeitas.

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(n) &: n^{\log_b a} \\ n^3 &: n^{\log_2 4} \\ n^3 &: n^2. \end{aligned}$$

A função $f(n)$ domina a função $n^{\log_b a}$ por um fator polinomial n^1. Assim, o caso 3 do Teorema Mestre pode ser aplicado se a condição de "regularidade" for satisfeita, ou seja, $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para uma constante $c < 1$.

$$\begin{aligned} af(\tfrac{n}{b}) &\leq cf(n) \\ 4(\tfrac{n}{2})^3 &\leq cn^3 \\ \tfrac{4n^3}{8} &\leq cn^3 \\ \tfrac{1}{2}n^3 &\leq cn^3. \end{aligned}$$

A inequação é satisfeita para $c = \frac{1}{2}$. Portanto, o caso 3 do Teorema Mestre se aplica e $T(n) = \Theta(n^3)$.

20. O tempo de execução de um algoritmo A é descrito pela recorrência

$$T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}) + n^2.$$

Um outro algoritmo A' tem um tempo de execução descrito pela recorrência

$$T'(n) = aT'(\tfrac{n}{4}) + n^2.$$

Qual é o maior valor inteiro de a tal que A' é assintoticamente mais rápido que A?

Resposta:
Para o algoritmo A' ser assintoticamente mais rápido que A, $T'(n)$ deve ter uma taxa de crescimento menor que $T(n)$. Vamos avaliar se o Teorema Mestre pode ser utilizado para a obtenção dos valores de $T'(n)$ e $T(n)$.

Vamos resolver $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$. Temos $a = 7, b = 2, f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b a} \\ n^2 & : & n^{\log_2 7} \\ n^2 & : & n^{2,807\ldots} \end{array}$$

A função $n^{\log_b a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial aproximado de $n^{0,807}$. Assim, de fato podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e temos que $T(n) = \Theta(n^{2,807})$.

Vamos resolver $T'(n) = aT(\frac{n}{4}) + n^2$. Temos $a = a, b = 4, f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b a} \\ n^2 & : & n^{\log_4 a} \end{array}$$

Para A' ser assintoticamente mais rápido que A, devemos ter o expoente $\log_4 a$ menor que $\log_2 7$ (os dois expoentes da função $n^{\log_b a}$ para a resolução de T' e T, respectivamente), ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \log_4 a & < & \log_2 7 \\ \dfrac{\log_2 a}{\log_2 4} & < & \log_2 7 \\ \log_2 a & < & 2\log_2 7 \\ \log_2 a & < & \log_2 49 \end{array}$$

Assim, a constante $a = 48$ é o maior inteiro menor que 49.

Vamos resolver $T'(n) = 48T(\frac{n}{4}) + n^2$. Temos $a = 48, b = 4, f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b a} \\ n^2 & : & n^{\log_4 48} \\ n^2 & : & n^{2,792\ldots} \end{array}$$

Novamente temos que a função $n^{\log_b a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial aproximado de $n^{0,792}$. Assim, de fato podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e temos que $T'(n) = \Theta(n^{2,792})$.

Finalmente podemos afirmar que o algoritmo A', que é $\Theta(n^{2,792})$, é assintoticamente mais rápido que o algoritmo A, que é $\Theta(n^{2,807})$.

Observações: Para os exercícios 21 a 65 considere que:

(a) todas as variáveis e constantes são inteiras e positivas, a menos que sejam explicitamente identificadas de outra forma;

(b) as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico;

(c) $p(n) = \sum_{i=0}^{g} a_i n^i$ é um polinômio de grau g, as constantes a_i $(1 \le i \le g)$ reais, sendo $a_g \neq 0$, e k uma constante.

Para cada afirmação nos exercícios 21 a 65, diga se é verdadeira ou falsa, provando ou fornecendo um contra-exemplo:

21. Se $k \geq g$, então $p(n) = O(n^k)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $f(n) = O(g(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0 \leq cn^k$$

para todo $n \geq n_0$.

Se dividirmos a inequação por n^k temos:

$$\frac{a_g}{n^{k-g}} + \frac{a_{g-1}}{n^{k-g-1}} + \ldots + \frac{a_0}{n^k} \leq c.$$

À medida que n cresce, cada termo (fração) do lado esquerdo da inequação fica menor. Assim, é possível achar constantes c e n_0 que satisfazem a inequação acima.

22. Se $k \leq g$, então $p(n) = \Omega(n^k)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $f(n) = \Omega(g(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$cn^k \leq a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0$$

para todo $n \geq n_0$.

Se dividirmos a inequação por n^k temos:

$$c \leq a_g n^{g-k} + a_{g-1} n^{g-k-1} + \ldots + a_0 n^{-k}.$$

À medida que n cresce, cada termo (fração) do lado direito da inequação fica menor mas positivo. Assim, é possível achar constantes c e n_0 que satisfazem a inequação acima.

23. Se $k = g$, então $p(n) = \Theta(n^k)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $f(n) = \Theta(g(n))$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que

$$c_1 n^k \leq a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0 \leq c_2 n^k$$

para todo $n \geq n_0$.

Se dividirmos a inequação por n^k temos:

$$c_1 \leq a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^k} \leq c_2.$$

Conhecendo os coeficientes do polinômio, é possível determinar constantes positivas n_0, c_1 e c_2 que satisfazem a inequação acima.

24. Se $k > g$, então $p(n) = o(n^k)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $f(n) = o(g(n))$ se para todas constantes positivas c e n_0, tais que $f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que para todas constantes positivas c e n_0

$$a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0 < cn^k$$

para todo $n \geq n_0$.

Se tomarmos o limite de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0}{n^k} = 0$$

para todas as constantes $c > 0$ e $n_0 > 1$.

25. Se $k < g$, então $p(n) = \omega(n^k)$.

 Resposta:
 A afirmação é verdadeira.

 Temos que $f(n) = \omega(g(n))$ se para todas constantes positivas c e n_0, tais que $cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

 Vamos supor que para todas constantes positivas c e n_0

$$cn^k < a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0$$

 para todo $n \geq n_0$.

 Se tomarmos o limite de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0} = \infty$$

 para todas as constantes $c > 0$ e $n_0 > 1$.

26. Se $k \geq g$, então $p(n) = O(n^g)$.

 Resposta:
 A afirmação é verdadeira.

 Neste caso, a constante k não tem nenhuma relação com a expressão $p(n) = O(n^g)$ já que

$$a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0 \leq cn^g.$$

 Se dividirmos a inequação por n^g temos:

$$a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^g} \leq c.$$

 À medida que n cresce, cada termo (fração) do lado esquerdo da inequação fica menor. Assim, é possível achar constantes c e n_0 que satisfazem a inequação acima. De fato, a função n^g é um limite assintótico superior firme para a função $p(n)$.

27. Se $k \leq g$, então $p(n) = \Omega(n^g)$.

 Resposta:
 A afirmação é verdadeira.

 Neste caso, a constante k não tem nenhuma relação com a expressão $p(n) = \Omega(n^g)$ já que

$$cn^g \leq a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0.$$

 Se dividirmos a inequação por n^g temos:

$$c \leq a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^g}.$$

 À medida que n cresce, cada termo (fração) do lado direito da inequação fica menor mas positivo. Assim, é possível achar constantes c e n_0 que satisfazem a inequação acima. De fato, a função n^g é um limite assintótico inferior firme para a função $p(n)$.

28. Se $k = g$, então $p(n) = \Theta(n^g)$.

 Resposta:
 A afirmação é verdadeira.

 Neste caso, a constante k não tem nenhuma relação com a expressão $p(n) = \Theta(n^g)$ já que

$$c_1 n^g \leq a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \ldots + a_0 \leq c_2 n^g.$$

Se dividirmos a inequação por n^g temos:

$$c_1 \leq a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^g} \leq c_2.$$

Conhecendo os coeficientes do polinômio, é possível determinar constantes positivas n_0, c_1 e c_2 que satisfazem a inequação acima.

29. Se $k > g$, então $p(n) = o(n^g)$.

    Resposta:
    A afirmação é falsa.

    Neste caso, a constante k não tem nenhuma relação com a expressão $p(n) = o(n^g)$. Assim, temos que:

    $$a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0 < cn^g.$$

    Se dividirmos a inequação por n^g temos:

    $$a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^g} < c.$$

    Não existem constantes $c > 0$ e n_0, tais que para todo $n \geq n_0$, a inequação acima seja verdadeira. Como mostrado no exercício 26, a função n^g é um limite assintótico superior firme para a função $p(n)$. Assim, não podemos ter $p(n) = o(n^g)$.

30. Se $k < g$, então $p(n) = \omega(n^g)$.

    Resposta:
    A afirmação é falsa.

    Neste caso, a constante k não tem nenhuma relação com a expressão $p(n) = \omega(n^g)$. Assim, temos que:

    $$cn^g < a_g n^g + a_{g-1} n^{g-1} + \ldots + a_0.$$

    Se dividirmos a inequação por n^g temos:

    $$a_g + \frac{a_{g-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^g} < c.$$

    Não existem constantes $c > 0$ e n_0, tais que para todo $n \geq n_0$, a inequação acima seja verdadeira. Como mostrado no exercício 27, a função n^g é um limite assintótico inferior firme para a função $p(n)$. Assim, não podemos ter $p(n) = \omega(n^g)$.

31. $f(n) = O(g(n))$ implica em $g(n) = O(f(n))$.

    Resposta:
    A afirmação é falsa.

    Seja $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$. Sabemos que $f(n) = O(g(n))$, i.e., $n = O(n^2)$ mas $g(n) \neq O(g(n))$, i.e., $n^2 \neq O(n)$.

    Se $f(n) = O(g(n))$ então $g(n) = \Omega(f(n))$. Em outras palavras, se a função $g(n)$ é um limite superior assintótico para $f(n)$ então a função $f(n)$ é um limite inferior assintótico para $g(n)$.

32. É possível achar funções $f(n)$ e $g(n)$ tais que $f(n) = \Theta(g(n))$.

    Resposta:
    A afirmação é falsa.

    De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

    Suponha que seja possível achar funções $f(n)$ e $g(n)$ tais que $f(n) = \Theta(g(n))$. Portanto, $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$, pela definição da notação assintótica Θ. Como $f(n) \prec g(n)$, tem-se que $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) \neq \Omega(g(n))$. Assim, não é possível achar funções $f(n)$ e $g(n)$ tais que $f(n) = \Theta(g(n))$.

33. $f(n) + g(n) = \Omega(f(n))$.

    <u>**Resposta**</u>:
    A afirmação é verdadeira.

    De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

    Temos que $f(n) + g(n) = \Omega(f(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $cf(n) \leq f(n) + g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

    Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

    $$cf(n) \leq f(n) + g(n)$$

    para todo $n \geq n_0$.

    Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

    $$c \leq 1 + \frac{g(n)}{f(n)}.$$

    Dado que $f(n) \prec g(n)$, é possível definir n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{g(n)}{f(n)} > 1$. Assim, para $c = 1$ a inequação é satisfeita.

34. $f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$.

    <u>**Resposta**</u>:
    A afirmação é falsa.

    De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

    Temos que $f(n)+g(n) = \Theta(f(n))$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1 f(n) \leq f(n)+g(n) \leq c_2 f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

    Vamos supor que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que

    $$c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n)$$

    para todo $n \geq n_0$.

    Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

    $$c_1 \leq 1 + \frac{g(n)}{f(n)} \leq c_2.$$

    Dado que $f(n) \prec g(n)$, não existe c_2 tal que $1 + \frac{g(n)}{f(n)} \leq c_2$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $f(n)+g(n) \neq \Theta(f(n))$.

35. $f(n) + g(n) = O(f(n))$.

    <u>**Resposta**</u>:
    A afirmação é falsa.

    De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

    Temos que $f(n) + g(n) = O(f(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $f(n) + g(n) \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$.

    Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

    $$f(n) + g(n) \leq cf(n)$$

    para todo $n \geq n_0$.

    Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

    $$1 + \frac{g(n)}{f(n)} \leq c.$$

    Dado que $f(n) \prec g(n)$, não existe c tal que $1 + \frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $f(n) + g(n) \neq O(f(n))$.

36. $f(n) + g(n) = \Omega(g(n))$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n)+g(n) = \Omega(g(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $cg(n) \leq f(n)+g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$cg(n) \leq f(n) + g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$, temos:

$$c \leq \frac{f(n)}{g(n)} + 1.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, é possível escolher $c = 1$ que satisfaz a inequação. Assim, $f(n) + g(n) = \Omega(g(n))$.

37. $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n)+g(n) = \Theta(g(n))$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1g(n) \leq f(n)+g(n) \leq c_2g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que

$$c_1g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$, temos:

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} + 1 \leq c_2.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, para n suficientemente grande temos que $\frac{f(n)}{g(n)} < 1$. Assim, existe c_2 tal que $\frac{f(n)}{g(n)} + 1 \leq c_2$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente, $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$.

38. $f(n) + g(n) = O(g(n))$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n) + g(n) = O(g(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $f(n) + g(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$f(n) + g(n) \leq cg(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$, temos:

$$\frac{f(n)}{g(n)} + 1 \leq c.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, para n suficientemente grande temos que $\frac{f(n)}{g(n)} < 1$. Assim, existe c tal que $\frac{f(n)}{g(n)}+1 \leq c$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente, $f(n) + g(n) = O(g(n))$.

39. $f(n) = \Omega((f(n))^2)$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

Temos que $f(n) = \Omega((f(n))^2)$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $c(f(n))^2 \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$c(f(n))^2 \leq f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$cf(n) \leq 1.$$

Veja que $f(n)$ é uma função positiva. Mais ainda, podemos ter que quando n cresce o valor de $f(n)$ também cresce (e.g., uma função exponencial). Assim, não é possível escolher uma constante c que quando multiplicada por $f(n)$, para todo $n \geq n_0$, termos um valor maior ou igual a 1. Assim, $f(n) \neq \Omega((f(n))^2)$.

40. $f(n) = \Theta((f(n))^2)$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

Sabemos que se $a(n) = \Theta(b(n))$ então $a(n) = \Omega(b(n))$ e $a(n) = O(b(n))$. De acordo com o exercício 39, temos $f(n) \neq \Omega((f(n))^2)$. Consequentemente, $f(n) \neq \Theta((f(n))^2)$.

41. $f(n) = O((f(n))^2)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $f(n) = O((f(n))^2)$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $f(n) \leq c(f(n))^2$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$f(n) \leq c(f(n))^2$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$1 \leq cf(n).$$

Veja que $f(n)$ é uma função positiva. Assim, para toda constante c positiva a inequação é verdadeira. Consequentemente, $f(n) = O((f(n))^2)$

42. $g(n) = \Omega(f(n))$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $g(n) = \Omega(f(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $cf(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$cf(n) \leq g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$c \leq \frac{g(n)}{f(n)}.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, é possível escolher $c = 1$ que satisfaz a inequação. Assim, $g(n) = \Omega(f(n))$.

43. $g(n) = \Theta(f(n))$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $g(n) = \Theta(f(n))$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que

$$c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$c_1 \leq \frac{g(n)}{f(n)} \leq c_2.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, para n suficientemente grande temos que $\frac{g(n)}{f(n)} > 1$. Assim, não existe c_2 tal que $\frac{g(n)}{f(n)} \leq c_2$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente, $g(n) \neq \Theta(f(n))$.

44. $g(n) = O(f(n))$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $g(n) = O(f(n))$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $g(n) \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$g(n) \leq cf(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$\frac{g(n)}{f(n)} \leq c.$$

Dado que $f(n) \prec g(n)$, para n suficientemente grande temos que $\frac{g(n)}{f(n)} > 1$. Assim, não existe c tal que $\frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ para todo $n \geq n_0$. Consequentemente, $g(n) \neq O(f(n))$.

45. $g(n) = \Omega(\frac{g(n)}{2})$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $g(n) = \Omega(\frac{g(n)}{2})$ se existirem constantes positivas c e n_0, tais que $c\frac{g(n)}{2} \leq g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$c\frac{g(n)}{2} \leq g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$ e multiplicarmos, temos:

$$c \leq 2.$$

Assim, $g(n) = \Omega(\frac{g(n)}{2})$.

46. $g(n) = \Theta(\frac{g(n)}{2})$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

Temos que $g(n) = \Theta(\frac{g(n)}{2})$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1\frac{g(n)}{2} \leq g(n) \leq c_2\frac{g(n)}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que

$$c_1\frac{g(n)}{2} \leq g(n) \leq c_2\frac{g(n)}{2}$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$ e multiplicarmos por 2, temos:

$$c_1 \leq 2 \leq c_2.$$

Assim, $g(n) = \Theta(\frac{g(n)}{2})$.

47. $g(n) = O(\frac{g(n)}{2})$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

Sabemos que se $a(n) = \Theta(b(n))$ então $a(n) = \Omega(b(n))$ e $a(n) = O(b(n))$. De acordo com o exercício 46, temos $g(n) = \Theta(\frac{g(n)}{2})$. Consequentemente, $g(n) = O(\frac{g(n)}{2})$.

48. $f(n) = \omega(g(n))$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é falsa.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n) = \omega(g(n))$ se para todas constantes positivas c e n_0, tais que $cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que para todas constantes positivas c e n_0

$$cg(n) < f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$, temos:

$$c\frac{g(n)}{f(n)} \leq 1.$$

A fração $\frac{g(n)}{f(n)}$ é estritamente positiva. Assim, não é possível achar nenhuma constante c que multiplicada por $\frac{g(n)}{f(n)}$ seja sempre menor ou igual a 1 quando n cresce. Consequentemente, $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

49. $f(n) = \omega(\frac{g(n)}{2})$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é falsa.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n) = \omega(\frac{g(n)}{2})$ se para todas constantes positivas c e n_0, tais que $c\frac{g(n)}{2} < f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que para todas constantes positivas c e n_0

$$c\frac{g(n)}{2} < f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $f(n)$ e multiplicarmos por 2, temos:

$$c\frac{g(n)}{f(n)} \leq 2.$$

A fração $\frac{g(n)}{f(n)}$ é estritamente positiva. Assim, não é possível achar nenhuma constante c que multiplicada por $\frac{g(n)}{f(n)}$ seja sempre menor ou igual a 2 quando n cresce. Consequentemente, $f(n) \neq \Omega(\frac{g(n)}{2})$.

50. $f(n) = o(g(n))$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

De acordo com a observação (b) acima, as funções $f(n)$ e $g(n)$ são positivas e $f(n) \prec g(n)$ do ponto de vista de crescimento assintótico.

Temos que $f(n) = o(g(n))$ se para todas constantes positivas c e n_0, $f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que para todas constantes positivas c e n_0

$$f(n) < cg(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por $g(n)$, temos:

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq 1.$$

A fração $\frac{f(n)}{g(n)}$ é estritamente positiva e sempre menor que 1 já que $f(n) \prec g(n)$. Assim, $f(n) = o(g(n))$.

51. $n^2 + 10^{10^{100}}n + 123 = O(n)$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

Para essa afirmação ser verdadeira, de acordo a definição da notação assintótica O, devem existir constantes positivas c e n_0, tais que

$$n^2 + 10^{10^{100}}n + 123 \leq cn$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n, temos:

$$n + 10^{10^{100}} + \frac{123}{n} \leq c.$$

Não existe constante positiva c que seja limitada pelo termo da esquerda da inequação à medida que n cresce. Assim, $n^2 + 10^{10^{100}}n + 123 \neq O(n)$.

52. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + \Omega(n)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Sabe-se que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 + (-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}).$$

Seja $h(n) = -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. A afirmação será verdadeira se $h(n) \in \Omega(n)$, i.e., se $h(n) = \Omega(n)$.

Pela definição da notação assintótica Ω, $h(n) = \Omega(n)$ se existirem constantes positivas c e n_0 tais que $cn \leq |h(n)|$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$cn \leq |h(n)|$$

para todo $n \geq n_0$, ou seja,

$$cn \leq \left| -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right|.$$

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n, temos:

$$c \leq \left| -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right|.$$

Para $n_0 = 2$ e $c = \frac{1}{2}$ a inequação é satisfeita. Assim, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + \Omega(n)$.

53. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + \Theta(1)$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

Sabe-se que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 + (-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}).$$

Seja $h(n) = -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. A afirmação será verdadeira se $h(n) \in \Theta(1)$, i.e., se $h(n) = \Theta(1)$.

Pela definição da notação assintótica Θ, $h(n) = \Theta(1)$ se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1 \cdot 1 \leq |h(n)| \leq c_2 \cdot 1$ para todo $n \geq n_0$, ou seja, se

$$c_1 \leq \left| -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right| \leq c_2.$$

No entanto, não existe constante c_2 que sempre limite a expressão $| -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}|$. Assim, $1 + 2 + 3 + \ldots + n \neq n^2 + \Theta(1)$.

54. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n^2 + O(n)$.

Resposta:
A afirmação é falsa.

Sabe-se que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 + (-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}).$$

Seja $h(n) = -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. A afirmação será verdadeira se $h(n) \in O(n)$, i.e., se $h(n) = O(n)$.

Pela definição da notação assintótica O, $h(n) = O(n)$ se existirem constantes positivas c e n_0 tais que $|h(n)| \leq cn$ para todo $n \geq n_0$.

Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$\left| -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right| \leq cn$$

para todo $n \geq n_0$.

Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n, temos

$$\left| -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right| \leq c.$$

No entanto, não existe constante c que sempre limite a expressão $| -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}|$. Assim, $1 + 2 + 3 + \ldots + n \neq n^2 + O(n)$.

55. $\binom{n}{2} = O(n^2)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Tem-se que

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}.$$

Pela definição da notação assintótica O, $\frac{n^2-n}{2} = O(n^2)$ se existirem constantes positivas c e n_0 tais que $\frac{n^2-n}{2} \leq cn^2$ para todo $n \geq n_0$.
Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$\frac{n^2-n}{2} \leq cn^2$$

para todo $n \geq n_0$.
Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n^2, temos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq c.$$

Para $n_0 = 1$ e $c = \frac{1}{2}$, a inequação é satisfeita. Assim, $\binom{n}{2} = O(n^2)$.

56. $\binom{n}{3} = O(n^3)$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Tem-se que

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^3-3n^2+2n}{6}.$$

Pela definição da notação assintótica O, $\frac{n^3-3n^2+2n}{6} = O(n^3)$ se existirem constantes positivas c e n_0 tais que $\frac{n^3-3n^2+2n}{6} \leq cn^3$ para todo $n \geq n_0$.
Vamos supor que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$\frac{n^3-3n^2+2n}{6} \leq cn^3$$

para todo $n \geq n_0$.
Ao dividirmos cada termo dessa inequação por n^3, temos

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \leq c.$$

Para $n_0 = 1$ e $c = \frac{1}{6}$, a inequação é satisfeita. Assim, $\binom{n}{3} = O(n^3)$.

57. Seja $\Omega(n^2 \log n) = X$, onde X representa o conjunto de funções que satisfaz a notação Ω para a função $n^2 \log n$. O conjunto $\{n^{1.5} \log n, n^e \log n, n^2 \ln n, \log\log n,\ n^2, n^{2.5}\} \subset X$?, onde e é a constante de Euler e ln é o logaritmo na base e.

Resposta:
A afirmação é falsa.

O conjunto X possui funções que têm uma taxa de crescimento pelo menos da ordem de $n^2 \log n$.

Ao examinarmos cada elemento desse conjunto, temos:

$$
\begin{aligned}
n^{1.5}\log n &\notin X \text{ [função com taxa de crescimento menor que } n^2\log n\text{]}\\
n^e\log n &\in X\\
n^2\ln n &\in X\\
\log\log n &\notin X \text{ [função com taxa de crescimento menor que } n^2\log n\text{]}\\
n^2 &\in X\\
n^{2.5} &\in X
\end{aligned}
$$

58. Seja $\Theta(1) = X$, onde X representa o conjunto de funções que satisfaz a notação Θ para a função 1. O conjunto $\{\pi, n^{\log_\pi 1}, e, 2^{\lfloor \pi/4 \rfloor n}\} \subset X$?, onde e é a constante de Euler.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

O conjunto X possui funções que têm uma taxa de crescimento exatamente constante.

Ao examinarmos cada elemento desse conjunto, temos:

$$
\begin{aligned}
\pi &\in X\\
n^{\log_\pi 1} = n^0 = 1 &\in X\\
e &\in X\\
2^{\lfloor \pi/4 \rfloor n} = 2^{0 \cdot 4} = 1 &\in X
\end{aligned}
$$

59. Seja $O(n^e) = X$, onde X representa o conjunto de funções que satisfaz a notação O para a função n^e. O conjunto $\{n^2, n\log n^2, n^{\frac{\pi}{2}}\log n^2, \frac{1}{n^e}\} \subset X$?, onde e é a constante de Euler.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

O conjunto X possui funções que têm uma taxa de crescimento no máximo da ordem de n^e.

Ao examinarmos cada elemento desse conjunto, temos:

$$
\begin{aligned}
n^2 &\in X\\
n\log n^2 &\in X\\
n^{\frac{\pi}{2}}\log n^2 \approx n^{1,67}\log n^2 &\in X\\
\frac{1}{n^e} &\in X
\end{aligned}
$$

60. Seja $\omega(n) = X$, onde X representa o conjunto de funções que satisfaz a notação ω para a função n. O conjunto $\{n^{1.5}\log n, n^e\log n, n^2\ln n, \log\log n, n^2, n^{1.1}\} \subset X$?, onde e é a constante de Euler e ln é o logaritmo na base e.

Resposta:
A afirmação é falsa.

O conjunto X possui funções que têm uma taxa de crescimento estritamente maior que da ordem de n.

Ao examinarmos cada elemento desse conjunto, temos:

$$
\begin{aligned}
n^{1.5}\log n &\in X\\
n^e\log n &\in X\\
n^2\ln n &\in X\\
\log\log n &\notin X \text{ [função com taxa de crescimento menor que } n\text{]}\\
n^2 &\in X\\
n^{1.1} &\in X
\end{aligned}
$$

61. Seja $o(n^e) = X$, onde X representa o conjunto de funções que satisfaz a notação o para a função n^e. O conjunto $\{n^2, n\log n^2, n^{\frac{\pi}{2}}\log n^2, \frac{1}{n^e}\} \subset X$?, onde e é a constante de Euler.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

O conjunto X possui funções que têm uma taxa de crescimento estritamente menor que da ordem de n^e.

Ao examinarmos cada elemento desse conjunto, temos:

$$\begin{aligned} n^2 &\in X \\ n\log n^2 &\in X \\ n^{\frac{\pi}{2}}\log n^2 \approx n^{1,67}\log n^2 &\in X \\ \frac{1}{n^e} &\in X \end{aligned}$$

62. A derivada de $h(n) = n^2$ é $h'(n) = 2n$. A derivada de $l(n) = 4n^2 + 2n$ é $l'(n) = 8n + 2$. Como $2n < 8n + 2$, $\forall\, n \geq 0$, $h(n)$ cresce mais lentamente que $l(n)$ e, portanto, $h(n) = O(l(n))$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

A função $h(n)$ cresce mais lentamente que a função $l(n)$. Assim, a função $l(n)$ é um limite superior assintótico para $h(n)$.

63. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral

$$T(n) = p^q\, T(\tfrac{n}{p}) + n,$$

onde p e q são constantes inteiras positivas maiores que 1.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Tem-se:

$$\begin{aligned} a &= p^q \\ b &= p \\ f(n) &= n \end{aligned}$$

Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Estas três condições são satisfeitas ($a > 1$ e $b > 1$, já que $p > 1$ e $q > 1$).

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(n) &: n^{\log_b a} \\ n &: n^{\log_p p^q} \\ n &: n^{q\log_p p} \\ n &: n^q. \end{aligned}$$

Como q é uma constante inteira positiva maior que 1, a função $n^{\log_b a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial n^{q-1}. Assim, o caso 1 do Teorema Mestre se aplica e temos que $T(n) = \Theta(n^q)$.

64. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral

$$T(n) = T(\tfrac{pn}{q}) + k,$$

onde p, q e k são constantes inteiras positivas maiores que 1 e $q > p$.

Resposta:
A afirmação é verdadeira.

Tem-se:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \tfrac{q}{p} \\ f(n) &= k \end{aligned}$$

Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Estas três condições são satisfeitas ($a = 1$ e $b > 1$, já que $q > p$).

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b a} \\ k & : & n^{\log_{\frac{q}{p}} 1} \\ k & : & n^0 \\ k & : & 1. \end{array}$$

Temos duas funções constantes. Assim, o caso 2 do Teorema Mestre se aplica e temos que $T(n) = \Theta(\log n)$.

65. O Teorema Mestre pode ser sempre aplicado para resolver qualquer equação de recorrência que tenha a forma geral

$$T(n) = pT(\tfrac{n}{q}) + n\log n,$$

onde p e q são constantes inteiras positivas, sendo $p < q$ e $p \geq 2$.

<u>**Resposta**</u>:
A afirmação é verdadeira.

Tem-se:

$$\begin{array}{rcl} a & = & p \\ b & = & q \\ f(n) & = & n\log n \end{array}$$

Para saber se o Teorema Mestre pode ser aplicado ou não, temos que ter as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e a função $f(n)$ assintoticamente positiva. Estas três condições são satisfeitas ($a > 1$ e $b > 1$, já que $p \geq 2$ e $2 \leq p < q$).

Deve-se analisar se a equação de recorrência cai em um dos três casos previstos do teorema ou não. Para isso, devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b a} \\ n\log n & : & n^{\log_q p} \\ n\log n & : & n^r. \end{array}$$

O expoente $\log_q p$ será um número real r no intervalo entre 0 e 1, já que a base q é maior que p. Assim, a função $f(n) = n\log n$ domina a função $n^{\log_b a}$ (n^r) por um fator polinomial n^{1-r}. O caso 3 do Teorema Mestre pode ser aplicado se a condição de "regularidade" for satisfeita, ou seja, $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para uma constante $c < 1$:

$$\begin{array}{rcl} af(\frac{n}{b}) & \leq & cf(n) \\ p(\frac{n}{q}\log\frac{n}{q}) & \leq & cn\log n \\ \frac{p}{q}n\log\frac{n}{q} & \leq & cn\log n \end{array}$$

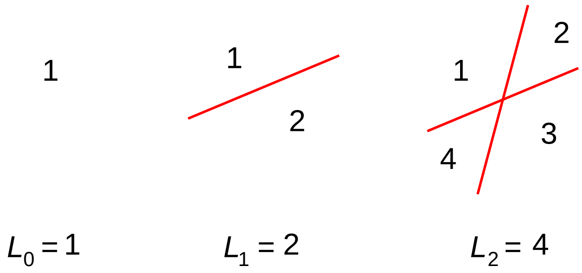
A inequação é satisfeita para $c = \frac{p}{q}, c < 1$, ou seja,

$$\frac{p}{q}n\log\frac{n}{q} \leq \frac{p}{q}n\log n.$$

Portanto, o caso 3 do Teorema Mestre se aplica e $T(n) = \Theta(n\log n)$.

<u>**Modelagem usando funções de recorrência**</u>

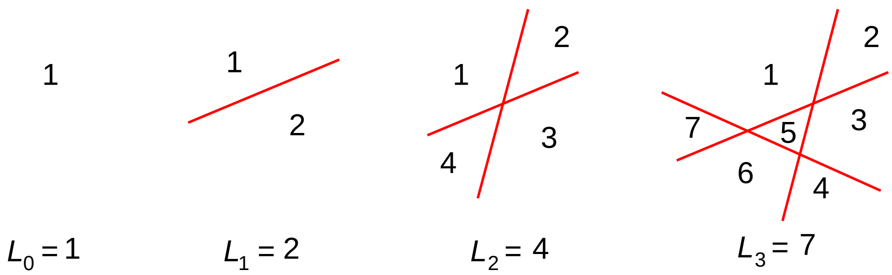
66. Qual é o número máximo de regiões L_n determinado por n retas no plano? Lembre-se que um plano sem nenhuma reta tem uma região, com uma reta tem duas regiões e com duas retas têm quatro regiões, conforme ilustrado abaixo.



<u>**Resposta**</u>:

$$\begin{array}{rcl} L_0 & = & 1 \\ L_1 & = & 2 \\ L_2 & = & 4 \\ L_3 & = & 7 \\ \vdots & = & \vdots \\ L_n & = & L_{n-1} + n \end{array}$$

Com três retas, o número máximo de regiões é sete. Observe que se traçarmos a terceira reta sobre a interseção das duas anteriores teremos seis regiões. Assim, quando acrescentamos a n-ésima reta, criamos mais n regiões que são obtidas com a interseção com as $n-1$ retas já existentes.



A fórmula fechada para L_n pode ser obtida facilmente a partir da observação que L_n vale a soma de 0 a n mais 1, ou seja,

$$L_n = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Prova (por indução matemática):

<u>Passo base</u>. $P(n_0) = P(0)$. Para $n = 0$ temos que $L_0 = \frac{0(0+1)}{2} + 1 = 1$, que é o valor presente na equação de recorrência.

<u>Passo indutivo</u>. Se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \to P(k+1)$.

- Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e.,

$$P(k) : L_k = \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

para algum inteiro $k \geq 1$. [hipótese indutiva]

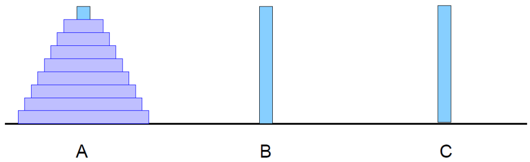
- Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : L_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Sabe-se que

$$
\begin{aligned}
L_{k+1} &= L_k + k && \text{[Pela definição da equação de recorrência]}\\
&= \tfrac{k(k+1)}{2} + 1 + k && \text{[Pela hipótese indutiva]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+1}{2} + 1 && \\
&= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 && \text{[O que devia ser provado]}
\end{aligned}
$$

67. O problema da Torre de Hanoi com requisito de adjacência. Sejam discos de tamanhos diferentes e três varetas, como ilustrado abaixo com oito discos. O jogo começa com o conjunto de discos empilhados em tamanho decrescente na vareta A.



O objetivo é transferir toda a torre da vareta A para a vareta C, movendo um disco de cada vez para uma *vareta adjacente* e nunca movendo um disco maior sobre um menor. Quantos movimentos são necessários para mover n discos da vareta A para a vareta C? Observe que a vareta A é adjacente a B que é adjacente a C. No entanto, a vareta A não é adjacente à vareta C.

Resposta:
Na resolução deste problema, vamos identificar os discos como D_i, onde i varia de 1 a n, sendo o disco do topo o D_1 e o mais no fundo da pilha o D_n. A tabela abaixo mostra como deve ser feito o movimento de discos entre as varetas A, B e C, para o caso de um, dois, três e n discos.

Discos	Movimentos	
1	2	D_1: A → B; D_1: B → C
2	8	D_1: A → B; D_1: B → C; D_2: A → B; D_1: C → B; D_1: B → A; D_2: B → C; D_1: A → B; D_1: B → C
3	26	D_1 e D_2: A → C com custo $T(2)$; D_3: A → B; D_1 e D_2: C → A com custo $T(2)$; D_3: B → C; D_1 e D_2: A → C com custo $T(2)$
⋮	⋮	
n	$3T(n-1)+2$	D_1 a D_{n-1}: A → C com custo $T(n-1)$; D_n: A → B; D_1 a D_{n-1}: C → A com custo $T(n-1)$; D_n: B → C; D_1 a D_{n-1}: A → C com custo $T(n-1)$

Pelo visto acima, a quantidade de movimentos de discos para o problema da Torre de Hanoi com a restrição de movimentos adjacentes entre varetas é

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 0\\
T(n) &= 3T(n-1)+2, \qquad \text{para } n > 0.
\end{aligned}
$$

Essa estratégia fica evidente, dada a restrição de movimentação dos discos: deve-se mover os $n-1$ discos do topo para a vareta destino; depois mover o disco do fundo da pilha (D_n) para a vareta do meio; depois mover os $n-1$ discos da vareta C para a vareta A com o objetivo de mover o disco D_n para a vareta destino; e, finalmente, mover os $n-1$ discos da vareta A para a vareta C sobre o disco D_n.

Para pequenos valores de n temos:

Discos	Movimentos	
0	0	
1	2	
2	8	$= 3{\cdot}2 + 2 = 2(3^1 + 3^0)$
3	26	$= 3^2{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 2 = 2(3^2 + 3^1 + 3^0)$
4	80	$= 3^3{\cdot}2 + 3^2{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 2 = 2(3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0)$
$\vdots$	$\vdots$	

Esta recorrência pode ser expressa por

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\sum_{i=0}^{n-1} 3^i \\ &= 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\ &= 3^n - 1. \end{aligned}$$

Prova (por indução matemática):

Passo base. $P(n_0) = P(0)$. Para $n = 0$ temos que $T(0) = 3^0 - 1 = 0$, que é o valor presente na equação de recorrência.

Passo indutivo. Se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \to P(k+1)$.

– Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e.,

$$P(k) : T(k) = 3^k - 1.$$

para algum inteiro $k \geq 1$. [hipótese indutiva]

– Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : T(k+1) = 3^{k+1} - 1.$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} T(k+1) &= 3T(k) + 2 && \text{[Pela definição da equação de recorrência]} \\ &= 3(3^k - 1) + 2 && \text{[Pela hipótese indutiva]} \\ &= 3^{k+1} - 1 && \text{[O que devia ser provado]} \end{aligned}$$