

LISTA DE EXERCÍCIOS 7: SOLUÇÕES
ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Quantos números ímpares existem no intervalo $[10, 99]$ que possuem dígitos distintos?

Resposta:

As dezenas que começam com 1, 3, 5, 7 e 9 têm quatro números ímpares que possuem dígitos distintos, enquanto as outras (2, 4, 6, 8) têm cinco números ímpares:

$$5 \times 4 + 4 \times 5 = 40.$$

2. Cinco pessoas irão ocupar um lugar numa mesa circular. Duas disposições de lugares são consideradas a mesma se uma é a rotação da outra. Quantas disposições diferentes existem?

Identifique as pessoas como A, B, C, D e E. Somente as posições relativas importam já que não existe uma identificação de assento na mesa. Por exemplo, comece com A e considere todos os arranjos das outras pessoas em relação a A. As pessoas B a E podem se sentar em volta de A de todas as formas possíveis. Assim, existem $4! = 24$ formas de arranjar o grupo.

3. Quantas formas diferentes as letras da palavra LETRA podem ser arranjadas se as letras LE devem ficar juntas mas podem ser escritas como LE ou EL?

Resposta:

Existem três letras (T, R e A) que podem aparecer separadas e duas que devem aparecer juntas (E e L) em qualquer ordem. Temos, então, $2 \times 4! = 48$ formas diferentes de arranjar essas letras.

4. Um grupo de oito pessoas está indo ao cinema e todos vão sentar na mesma fila. Duas dessas pessoas não querem sentar uma ao lado da outra. Quantas formas diferentes as oito pessoas podem ser dispostas na fila?

Resposta:

Existem $8!$ possibilidades de oito pessoas se sentarem em qualquer ordem. Dessa quantidade, temos que subtrair os casos em que as duas pessoas não vão se sentar uma ao lado da outra, i.e., $2 \times 7!$ (as oito posições são transformadas em sete, como se tivéssemos uma posição dupla em que temos duas ordens possíveis). Assim, temos $8! - 2 \times 7! = 40320 - 2 \times 5040 = 30240$ possibilidades.

5. Seja o seguinte problema: quantos números inteiros existem no intervalo $[1, 100\,000]$ que possuem o dígito 6 exatamente uma única vez? E seja a seguinte resposta: Analisando este problema por faixa de valores temos:

Intervalo	Quantidade	Acumulado
$[1, 9]$	1 Apenas o 6.	1
$[10, 99]$	$ \{16, 26, \dots, 96\} + \{60, 61, \dots, 69\} - 2 = 9 + 10 - 2 = 17$ (66 está presente em cada conjunto)	18
$[100, 999]$	$8 \cdot 18 + (100 - 18) = 226$	244
$[1\,000, 9\,999]$	$8 \cdot 244 + (1000 - 244) = 2708$	2952
$[10\,000, 100\,000]$	$8 \cdot 2952 + (10000 - 2952) = 30664$	33616

Na primeira faixa (intervalo), temos apenas um número. Na segunda faixa, temos um número que termina em 6 em cada dezena e de 60 a 69 temos 10 números. No entanto, nos dois conjuntos temos o número 66 que deve ser retirado. As centenas de 1 a 9, exceto a 6, têm a mesma quantidade de números com um algarismo 6 da faixa anterior. A centena que começa com 6 tem 100 números menos a quantidade de números da

faixa anterior. O mesmo raciocínio vale para as faixas seguintes. Existem 33 616 números nesse intervalo que possuem exatamente um algarismo 6.

Esta solução está correta? Se sim, por que? Se não, justifique sua resposta.

Resposta:

A solução está incorreta. Nas duas primeiras faixas, a solução está certa. No entanto, a partir da terceira faixa ($[100, 999]$) está errado. O número 66 não pode ser incluído na segunda faixa, mas deve ser incluído na terceira faixa para excluir o número 666. Ou seja, deve-se subtrair 19 e não 18 como mostrado. A partir daí, o erro é propagado. Veja a solução deste mesmo exercício nas transparências sobre o material de Análise Combinatória (Exemplo 24).

6. Quantos números inteiros existem no intervalo $[1, 1000]$ que são múltiplos de 4 ou múltiplos de 7?

Resposta:

Vamos usar a seguinte estratégia:

- (a) Enumere os números divisíveis por 4 nesse intervalo;
- (b) Enumere os números divisíveis por 7 nesse intervalo;
- (c) Enumere os números divisíveis por 4 e 7 (ou seja, 28) nesse intervalo.

A solução deste problema é dado por $(a) + (b) - (c)$.

- (a) Números divisíveis por 4 nesse intervalo: 250.
 - $4 \cdot 1 = 4, 4 \cdot 2 = 8, \dots, 4 \cdot 250 = 1000$.
- (b) Números divisíveis por 7 nesse intervalo: 142.
 - $7 \cdot 1 = 7, 7 \cdot 2 = 14, \dots, 7 \cdot 142 = 994$.
- (c) Números divisíveis por 28 nesse intervalo: 35.
 - $28 \cdot 1 = 28, 28 \cdot 2 = 56, \dots, 28 \cdot 35 = 980$.

A solução deste problema é dado por $(a) + (b) - (c) = 250 + 142 - 35 = 357$.

7. Os assessores da FIFA estão estudando a questão de formação de times de futebol profissional com homens e mulheres. Numa pesquisa preliminar, 19 dos 30 assessores se mostraram favoráveis a permitir times com mulheres e 11 não. Um comitê de seis assessores será formado para discutir a questão. Quantos comitês podem ser formados com pelo menos três assessores que são favoráveis a esta questão?

Resposta:

Podemos ter comitês com três a favor e três contra, quatro a favor e dois contra, cinco a favor e um contra e, finalmente, seis a favor:

$$\binom{19}{3} \cdot \binom{11}{3} + \binom{19}{4} \cdot \binom{11}{2} + \binom{19}{5} \cdot \binom{11}{1} + \binom{19}{6} \cdot \binom{11}{0} = 528105.$$

8. Calcule o valor de

$$\sum_{k=0}^n C(n, k).$$

Resposta:

Esta soma vale 2^n , que é o número de subconjuntos formados a partir de um conjunto de n elementos, ou seja,

- $C(n, 0)$: número de subconjuntos de 0 elementos;
- $C(n, 1)$: número de subconjuntos de 1 elemento;
- $C(n, 2)$: número de subconjuntos de 2 elementos;
- \vdots
- $C(n, n)$: número de subconjuntos de n elementos.

Esta é outra forma de provar que de fato o conjunto potência de um conjunto com n elementos tem 2^n elementos distintos.

9. Quantas peças de dominós podem ser formadas a partir do conjunto de números inteiros de 0 a d ?

Resposta:

As peças do dominó têm “dois números”, um em cada extremidade da peça, sendo que repetição é permitida (pode haver uma peça com o mesmo número nos dois extremos). Neste caso temos $n = d + 1$ categorias (números inteiros de 0 a d) e multiconjuntos de tamanho 2 ($r = 2$):

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{d+r}{2}.$$

Para o caso de $d = 6$ (dominó tradicional com números inteiros de 0 a 6), temos $C(8, 2) = 28$.

10. Num tabuleiro de xadrez de 8×8 , a torre pode mover para qualquer casa na horizontal ou vertical. Quantos caminhos diferentes a torre pode fazer para sair do canto inferior esquerdo e chegar no canto superior direito se todos os movimentos são para a direita ou para cima?

Resposta:

A torre deve mover sete quadrados para a direita e sete para cima. Assim,

$$\#T = \frac{14!}{7!7!} = 3432.$$

11. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, sendo que cada $x_i, i = 1, 2, 3$, é um inteiro não negativo?

Resposta:

Considere o número 20 como sendo 20 símbolos |, ou seja, 20 “barras” a serem distribuídas entre as três variáveis que, neste caso, funcionam como três categorias. Assim, temos um problema de combinação com repetição onde $n = 3$ e $r = 20$. Observe que pode existir uma categoria sem nenhuma barra, o que satisfaz o enunciado do problema já que x_i deve ser um inteiro não negativo.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{20} = \frac{22 \cdot 21}{2} = 231.$$

12. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, sendo que cada $x_i, i = 1, 2, 3$, é um inteiro positivo?

Resposta:

Este exercício é similar ao exercício 11 com a diferença que cada x_i deve ser positivo. Isso significa que cada categoria deve ter pelo menos uma barra. Como temos três categorias precisamos de três barras para atribuir a cada x_i . Isso significa que sobram 17 barras para serem distribuídas entre as três categorias, ou seja, $n = 3$ e $r = 17$.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{17+3-1}{17} = \binom{19}{17} = 171.$$

13. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, sendo que cada $x_i, i = 1, 2, 3$, é um inteiro não negativo?

Resposta:

Este problema pode ser resolvido separadamente como:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Neste caso, $n = 3$ e r varia de 0 a 20, ou seja,

$$\text{N}^\circ \text{ de soluções} = \sum_{r=0}^{20} \binom{n+r-1}{r}.$$

Este problema é equivalente a determinar o número de soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, ou seja, $n = 4$ e $r = 20$. A variável x_4 assume os possíveis valores das desigualdades.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20} = 1771.$$

14. Quantas soluções existem para a equação

$$p + q + r + s + t = 50,$$

sendo p, q, r, s e t são números inteiros ≥ 5 .

Resposta:

Cada variável é uma categoria que inicialmente tem 5 unidades. Devemos distribuir as outras 25 unidades entre as cinco categorias. Assim, temos

$$\binom{25 + 5 - 1}{25} = \binom{29}{25}$$

15. Qual é a probabilidade de ocorrer um *flush* (cinco cartas do mesmo naipe) em um jogo de *Poker*?

Resposta:

Este problema pode ser resolvido em duas etapas:

(a) Quantidade de *flushes*:

– Conjunto de cinco cartas para cada naipe: $C(13, 5) \times 4$.

(b) Quantidade de mãos de cinco cartas.

– Conjunto de cinco cartas aleatórias: $C(52, 5)$.

$$P(\text{flush}) = \frac{C(13, 5) \times 4}{C(52, 5)} = 0,00198$$

16. O jogo da Sena da Caixa Econômica Federal sorteia um conjunto de seis números dentre os números de 1 a 50. Suponha que uma pessoa faz uma aposta simples, ou seja, escolhe apenas seis números. Qual é a probabilidade dessa pessoa:

(a) Acertar a sena, ou seja, os seis números.

Resposta:

A quantidade de conjuntos de seis números dentre os 50 números da sena é $C(50, 6)$. A probabilidade de um conjunto de seis números ser o vencedor é:

$$P(\text{sena}) = \frac{1}{C(50, 6)} = \frac{1}{15890700}.$$

(b) Acertar a quina, ou seja, cinco números.

Resposta:

Para acertar a quina, uma pessoa deve acertar cinco dos seis números sorteados na sena, i.e., $C(6, 5)$ e escolher um sexto número diferente dentre os 44 não sorteados, i.e., $C(44, 1)$. A probabilidade de acertar a quina é essa quantidade sobre todos os conjuntos de seis números.

$$P(\text{quina}) = \frac{C(6, 5) \times C(44, 1)}{C(50, 6)} \approx \frac{1}{60192}.$$

(c) Acertar a quadra, ou seja, quatro números.

Resposta:

Para acertar a quadra, uma pessoa deve acertar quatro dos seis números sorteados na sena, i.e., $C(6, 4)$ e escolher dois números diferentes dentre os 44 não sorteados, i.e., $C(44, 2)$. A probabilidade de acertar a quadra é essa quantidade sobre todos os conjuntos de seis números.

$$P(\text{quadra}) = \frac{C(6, 4) \times C(44, 2)}{C(50, 6)} \approx \frac{1}{1120}.$$