

LISTA DE EXERCÍCIOS 8: SOLUÇÕES
RELAÇÕES

Definição 1 [*Composição de relações*]. Seja R uma relação do conjunto A para um conjunto B e S uma relação do conjunto B para um conjunto C . A **composição** de R e S é a relação formada por pares ordenados (a, c) , onde $a \in A, c \in C$, para os quais existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. A composição de R e S é representada por $S \circ R$.

Definição 2 [*Relação Irreflexiva*]. Seja R uma relação definida no conjunto A . Uma relação R é chamada irreflexiva se $\forall a \in A, (a, a) \notin R$.

Definição 3 [*Relação Assimétrica*]. Seja R uma relação do conjunto A para um conjunto B . Uma relação R é chamada assimétrica se $(a, b) \in R$ então $(b, a) \notin R$. Nesse sentido, uma relação assimétrica é anti-simétrica e irreflexiva.

Definição 4 [*Relação Complementar*]. Seja R uma relação do conjunto A para um conjunto B . A relação complementar \bar{R} é o conjunto de pares ordenados $\{(a, b) | (a, b) \notin R\}$.

Lista de Relações: As relações abaixo estão definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

- (A) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- (B) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (C) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$
- (D) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- (E) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (F) $R_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

1. Como foi dito na introdução do material de relações, o mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc. O exemplo abaixo mostra isso:

Antes de começar uma reunião sobre o relacionamento entre duas empresas parceiras num determinado negócio, dois homens começam uma conversa onde um deles fala sobre sua relação familiar. A seguir, está o relato o que esse homem fez:

“Há alguns anos atrás, eu conheci uma jovem viúva com uma filha já nos seus quase 20 anos. Nós nos casamos. Mais tarde, meu pai se casou com minha enteada.

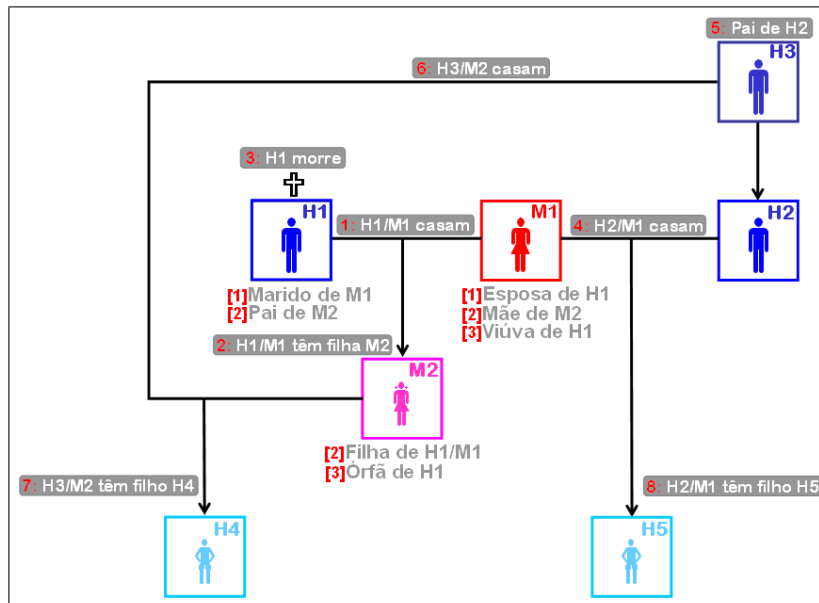
Depois disso, minha enteada teve um filho.

Isso não foi nada até minha esposa e eu termos um filho.

Apresente um diagrama que mostre as relações dessa estória bizarra. (Este é apenas um exercício de “curiosidade”.)

Resposta:

A descrição acima pode ser representada pelo seguinte diagrama:



Esse diagrama identifica todos os “eventos” que ocorreram que levam a diferentes relações. Os eventos são:

- H1/M1 casam;
- H1/M1 têm filha M2;
- H1 morre;
- H2/M1 casam;
- H3 é identificado como pai de H2;
- H3/M2 casam;
- H3/M2 têm filho H4;
- H2/M1 têm filho H5;

Após os três primeiros eventos, podemos identificar as seguintes relações para H1, M1 e M2:

- | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------|
| • H1: | • M1: | • M2: |
| – [1] Marido de M1 | – [1] Esposa de H1 | – [2] Filha de H1/M1 |
| – [2] Pai de M2 | – [2] Mãe de M2 | – [3] Órfã de H1 |
| | – [3] Viúva de H1 | |

No entanto, outras relações mais “diferentes” podem ser identificadas para H4 e H5.

2. Determine se cada relação da lista de relações acima é:

- Reflexiva
- Irreflexiva
- Simétrica
- Anti-simétrica
- Assimétrica
- Transitiva
- Relação de equivalência
- Relação de ordem parcial

Resposta:

R_i	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Assimétrica	Transitiva	Equivalência	Ordem Parcial
1	N	N	N	N	N	S	N	N
2	S	N	S	N	N	S	S	N
3	N	S	S	N	N	N	N	N
4	N	S	N	S	S	N	N	N
5	S	N	S	S	N	S	S	N
6	N	S	N	N	N	N	N	N

3. Determine a relação \overline{R} para cada relação da lista de relações acima.

Resposta:

- (A) $\overline{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
 (B) $\overline{R}_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
 (C) $\overline{R}_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$
 (D) $\overline{R}_4 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
 (E) $\overline{R}_5 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
 (F) $\overline{R}_6 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

4. Determine se cada relação \overline{R} da lista de relações acima é:

- (a) Reflexiva
 (b) Irreflexiva
 (c) Simétrica
 (d) Anti-simétrica
 (e) Assimétrica
 (f) Transitiva

Resposta:

\overline{R}_i	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Assimétrica	Transitiva
1	N	N	N	N	N	N
2	N	S	S	N	N	N
3	S	N	S	N	N	N
4	S	N	N	N	N	N
5	N	S	S	N	N	N
6	S	N	N	N	N	N

5. Determine a composição das relações $R_i \circ R_2, i = 1 \dots 6$.

Resposta:

$$R_1 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \text{ e } (2, 2) \rightarrow (1, 2) \\ (1, 2) \text{ e } (2, 3) \rightarrow (1, 3) \\ (1, 2) \text{ e } (2, 4) \rightarrow (1, 4) \\ (2, 2) \text{ e } (2, 2) \rightarrow (2, 2) \\ (2, 2) \text{ e } (2, 3) \rightarrow (2, 3) \\ (2, 2) \text{ e } (2, 4) \rightarrow (2, 4) \\ (3, 3) \text{ e } (3, 2) \rightarrow (3, 2) \\ (3, 3) \text{ e } (3, 3) \rightarrow (3, 3) \\ (3, 3) \text{ e } (3, 4) \rightarrow (3, 4) \end{array} \right\}$$

$$R_2 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \text{ e } (1,1) \rightarrow (1,1) \\ (1,1) \text{ e } (1,2) \rightarrow (1,2) \\ (2,1) \text{ e } (1,1) \rightarrow (2,1) \\ (2,1) \text{ e } (1,2) \rightarrow (2,2) \\ (3,3) \text{ e } (3,3) \rightarrow (3,3) \\ (4,4) \text{ e } (4,4) \rightarrow (4,4) \end{array} \right\}$$

$$R_3 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2) \text{ e } (2,4) \rightarrow (1,4) \\ (2,2) \text{ e } (2,4) \rightarrow (2,4) \\ (4,4) \text{ e } (4,2) \rightarrow (4,2) \end{array} \right\}$$

$$R_4 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \text{ e } (1,2) \rightarrow (1,2) \\ (1,2) \text{ e } (2,3) \rightarrow (1,3) \\ (2,1) \text{ e } (1,2) \rightarrow (2,2) \\ (2,2) \text{ e } (2,3) \rightarrow (2,3) \\ (2,3) \text{ e } (3,4) \rightarrow (3,4) \end{array} \right\}$$

$$R_5 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \text{ e } (1,1) \rightarrow (1,1) \\ (1,2) \text{ e } (2,2) \rightarrow (1,2) \\ (2,1) \text{ e } (1,1) \rightarrow (2,1) \\ (2,2) \text{ e } (2,2) \rightarrow (2,2) \\ (3,3) \text{ e } (3,3) \rightarrow (3,3) \\ (4,4) \text{ e } (4,4) \rightarrow (4,4) \end{array} \right\}$$

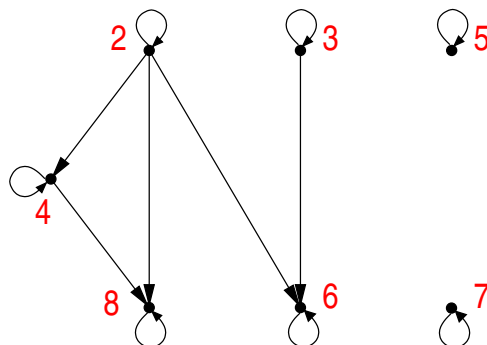
$$R_6 \circ R_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \text{ e } (1,3) \rightarrow (1,3) \\ (1,1) \text{ e } (1,4) \rightarrow (1,4) \\ (2,1) \text{ e } (1,3) \rightarrow (2,3) \\ (2,1) \text{ e } (1,4) \rightarrow (2,4) \\ (3,3) \text{ e } (3,1) \rightarrow (3,1) \\ (3,3) \text{ e } (3,4) \rightarrow (3,4) \end{array} \right\}$$

6. Seja $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e defina a relação binária R em A como:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x|y.$$

Desenhe o grafo dirigido da relação R .

Resposta:



7. Seja $A = \{2, 4\}$ e $B = \{6, 8, 10\}$ e defina as relações binárias R e S como:

$$\forall(x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y,$$

$$\forall(x, y) \in A \times B, xSy \Leftrightarrow y - 4 = x.$$

Liste os pares ordenados que estão em $A \times B$, R , S , $R \cup S$, $R \cap S$.

Resposta:

$$A \times B = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 10)\}$$

$$R = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 8)\}$$

$$S = \{(2, 6), (4, 8)\}$$

$$R \cup S = R$$

$$R \cap S = S$$

8. Mostre se a relação binária D é reflexiva, simétrica, transitiva. Seja a relação D definida sobre \mathbb{R} como:

$$x, y \in \mathbb{R}, xDy \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

Resposta:

- Reflexiva (V): $\forall x \in \mathbb{R}, xx \geq 0$.
Independentemente do sinal de x , o seu quadrado sempre será maior ou igual 0.
 - Simétrica (V): $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $xy \geq 0$ então $yx \geq 0$.
Pela transitividade da multiplicação.
 - Transitiva (F): $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $xy \geq 0 \wedge yz \geq 0$ então $xz \geq 0$.
Para $y = 0$ e as variáveis x e z com sinais opostos, teremos $xy = 0 \wedge yz = 0$, mas $xz < 0$.
9. Determine se a relação R no conjunto de todas as páginas Web é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva, onde $(x, y) \in R$, sse:

- (a) Todas as pessoas que visitam a página Web x também visitam a página Web y .

Resposta:

- Reflexiva (V): Todas as pessoas que visitam a página x também visitam a página Web x .
 - Simétrica (F): Certamente existem pessoas que visitam a página x que formam um conjunto próprio das pessoas que visitam a página y e, assim, a recíproca é verdadeira.
 - Anti-simétrica (F): O conjunto próprio de pessoas que visitam a página x visitam a página y e vice-versa.
 - Transitiva (V): se todas as pessoas que visitam a página x também visitaram a página y e todas as pessoas que visitam a página y visitam a página z então todas as pessoas que visitam a página x visitam também a página z .
- (b) Não existem *links* comuns na página Web x e na página Web y .

Resposta:

- Reflexiva (F): qualquer página x que tenha um *link* não está relacionada com ela mesma.
 - Simétrica (V): pela definição da relação.
 - Anti-simétrica (F): suponha que existam páginas x e y que não tenham *links* comuns. Assim, a relação não pode ser anti-simétrica.
 - Transitiva (F): pela simetria temos que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ e não temos $(x, x) \in R$.
- (c) Existe pelo menos um *link* em comum na página Web x e na página Web y .

Resposta:

- Reflexiva (F): qualquer página x que não tenha *link* não está relacionada com ela mesma.
- Simétrica (V): pela definição da relação.
- Anti-simétrica (F): suponha que existam páginas x e y que não tenham *links* comuns. Assim, a relação não pode ser anti-simétrica.

- Transitiva (F): pela simetria temos que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ e não temos $(x, x) \in R$.
- (d) Existe uma página Web que inclui *links* para a página Web x e para a página Web y .

Resposta:

- Reflexiva (F): qualquer página x que não tenha *link* não está relacionada com ela mesma.
- Simétrica (V): pela definição da relação.
- Anti-simétrica (F): suponha que existam páginas x e y que são referenciadas por uma terceira página z . Assim, a relação não pode ser anti-simétrica.
- Transitiva (F): pela simetria temos que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ e não temos $(x, x) \in R$.

10. Qual é a composição das relações R e S onde R é a relação de $\{1, 2, 3\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ e S é a relação de $\{1, 2, 3, 4\}$ para $\{0, 1, 2\}$ com $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Resposta:

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (4, 1)\}$$

11. Seja o conjunto $A = \{0, 1\}$. Quantas relações binárias distintas podem ser definidas sobre o conjunto A ?

Resposta:

$$A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Cada subconjunto de $A \times A$ pode definir uma relação distinta. Isso nos leva ao conjunto potência $\mathcal{P}(A \times A)$. Assim, temos $2^4 = 16$ relações distintas.

12. Liste as relações do exercício 11.

Resposta:

$$\begin{aligned} R_0 &= \emptyset \\ R_1 &= \{(0, 0)\} \\ R_2 &= \{(0, 1)\} \\ R_3 &= \{(1, 0)\} \\ R_4 &= \{(1, 1)\} \\ R_5 &= \{(0, 0), (0, 1)\} \\ R_6 &= \{(0, 0), (1, 0)\} \\ R_7 &= \{(0, 0), (1, 1)\} \\ R_8 &= \{(0, 1), (1, 0)\} \\ R_9 &= \{(0, 1), (1, 1)\} \\ R_{10} &= \{(1, 0), (1, 1)\} \\ R_{11} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} \\ R_{12} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \\ R_{13} &= \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} \\ R_{14} &= \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \\ R_{15} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \end{aligned}$$

13. Determine se cada relação do exercício 12 é:

- (a) Reflexiva
- (b) Irreflexiva
- (c) Simétrica
- (d) Anti-simétrica
- (e) Assimétrica
- (f) Transitiva

Resposta:

Veja tabela abaixo.

14. Determine a relação complementar das relações do exercício 12.

Resposta:

$$\begin{aligned} \overline{R_0} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \\ \overline{R_1} &= \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \\ \overline{R_2} &= \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} \\ \overline{R_3} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \\ \overline{R_4} &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} \\ \overline{R_5} &= \{(1, 0), (1, 1)\} \\ \overline{R_6} &= \{(0, 1), (1, 1)\} \\ \overline{R_7} &= \{(0, 1), (1, 0)\} \\ \overline{R_8} &= \{(0, 0), (1, 1)\} \\ \overline{R_9} &= \{(0, 0), (1, 0)\} \\ \overline{R_{10}} &= \{(0, 0), (0, 1)\} \\ \overline{R_{11}} &= \{(1, 1)\} \\ \overline{R_{12}} &= \{(1, 0)\} \\ \overline{R_{13}} &= \{(0, 1)\} \\ \overline{R_{14}} &= \{(0, 0)\} \\ \overline{R_{15}} &= \emptyset \end{aligned}$$

15. Considere as relações dos exercícios 12 e 14. Faça uma tabela, como a que está abaixo, indicando se cada uma das seis propriedades é verdadeira ou falsa. Utilizando essa tabela, tente estabelecer uma relação entre as propriedades de R e de \overline{R} .

Resposta:

# Relação	Propriedades de R						Propriedades de \overline{R}					
	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Assimétrica	Transitiva	Reflexiva	Irreflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Assimétrica	Transitiva
0		V	V	V	V	V	V		V			V
1			V	V		V			V			
2		V		V	V	V	V			V		V
3		V		V	V	V	V			V		V
4			V	V		V			V			
5				V		V				V		V
6				V		V				V		V
7	V		V	V		V		V	V			
8		V	V				V		V	V		V
9				V		V				V		V
10				V		V				V		V
11			V						V	V		V
12	V			V		V		V		V	V	V
13	V			V		V		V		V	V	V
14			V						V	V		V
15	V		V			V		V	V	V	V	V

16. Quantas relações binárias existem em um conjunto com n elementos que são:

(a) Simétricas

Resposta:

Para definir uma relação simétrica, deve-se decidir, para cada par não ordenado de elementos distintos $\{a, b\}$ de A , se os pares (a, b) e (b, a) serão incluídos ou não. Isso pode ser feito de duas formas diferentes para cada par não ordenado com elementos distintos. Para cada elemento $a \in A$, deve-se decidir se

o par (a, a) será incluído ou não, novamente com duas possibilidades. Esses dois problemas podem ser considerados um único se considerarmos um “elemento” como um par não ordenado de elementos com repetição permitida. Temos, então, $C(n+2-1, 2) = C(n+1, 2)$ formas distintas de escolher um par não ordenado de elementos. Assim, existem $2^{C(n+1, 2)} = 2^{n(n+1)/2}$ relações distintas que são simétricas.

(b) Anti-simétricas

Resposta:

Similar à letra anterior. Para cada par não ordenado de elementos distintos $\{a, b\}$ de A , temos três escolhas: (i) incluir somente (a, b) ; (ii) incluir somente (b, a) ; e (iii) não incluir nenhum dos dois pares. Para cada elemento de A temos duas possibilidades. Assim, temos $3^{C(n, 2)} 2^n = 3^{n(n-1)/2} 2^n$ relações distintas que são anti-simétricas.

(c) Assimétricas

Resposta:

Na letra anterior, temos três opções para $a \neq b$. Neste caso, não temos a possibilidade de incluir (a, a) na relação. Assim, temos $3^{C(n, 2)} = 3^{n(n-1)/2}$ relações distintas que são assimétricas.

(d) Irreflexivas

Resposta:

Para cada par ordenado (a, b) , com $a \neq b$ (sendo que existem $P(n, 2)$ desses pares), podemos escolher (a, b) ou não. Não é possível ter pares $(a, a), \forall a \in A$. Assim, temos $2^{P(n, 2)} = 2^{n(n-1)}$ relações distintas que são irreflexivas.

(e) Reflexivas e simétricas

Resposta:

Similar à letra (a), exceto que devemos ter os pares $(a, a), \forall a \in A$. Para cada par não ordenado de elementos distintos de A , pode-se incluir ou não os dois pares ordenados correspondentes. Assim, temos $2^{C(n, 2)} = 2^{n(n-1)/2}$ relações distintas que são simultaneamente reflexiva e simétrica.

(f) Nem reflexivas nem irreflexivas

Resposta:

Dado os pares ordenados (a, b) com $a \neq b$, podemos gerar $2^{P(n, 2)}$ pares distintos como discutido na letra (d). Dada a decisão de incluir ou não o par (a, a) , duas das 2^n possibilidades não podem ocorrer (relação vazia e relação reflexiva). Assim, temos $2^{P(n, 2)}(2^n - 2) = 2^{n^2} - 2^{n^2-n+1}$ relações distintas que não são reflexivas nem irreflexivas.

17. Liste os pares ordenados nas relações de equivalência produzidos pelas partições do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

(a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

Resposta:

$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

(b) $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$

Resposta:

$R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

(c) $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$

Resposta:

$R_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$