

**LISTA DE EXERCÍCIOS 9**  
**GRAFOS**

1. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.

(a)

$$A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$$

(b)

$$A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

(c)

$$A_1 = \{x \mid x < 0\}$$

$$A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$$

$$A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$$

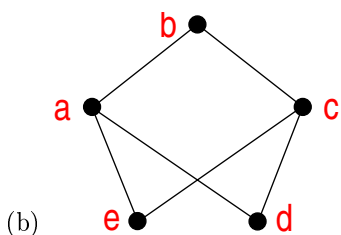
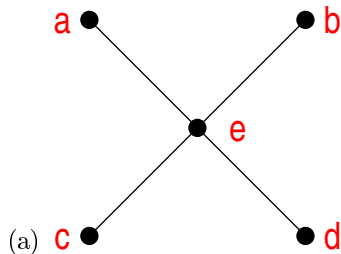
$$A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

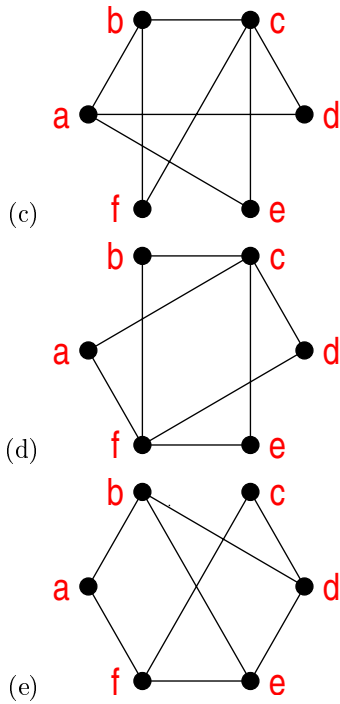
$$A_5 = \{x \mid x > -1\}$$

$$A_6 = \mathbb{R}$$

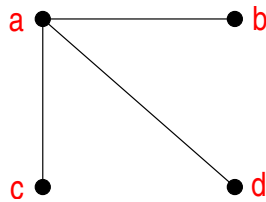
2. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

3. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.





4. Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo?
- $K_n$  (grafo completo)
  - $K_{m,n}$  (grafo bipartido completo)
  - $C_n$  (grafo ciclo)
  - $Q_n$  (grafo cubo)
  - $W_n$  (grafo roda)
5. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Desenhe um possível grafo.
6. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.
- 3, 3, 3, 3, 2
  - 1, 2, 3, 4, 5
  - 1, 2, 3, 4, 4
  - 3, 4, 3, 4, 3
  - 0, 1, 2, 2, 3
  - 1, 1, 1, 1, 1
7. Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem  $K_3$ ?
8. Desenhe todos os subgrafos do grafo abaixo.



9. Para que valores de  $n$  os grafos abaixo são regulares?
- $K_n$

- (b)  $C_n$
- (c)  $W_n$
- (d)  $Q_n$

10. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

11. O grafo complementar  $\overline{G}$  de um grafo simples  $G$  tem os mesmos vértices de  $G$ . Dois vértices são adjacentes em  $\overline{G}$  se, e somente se, eles não são adjacentes em  $G$ . Determine os seguintes grafos.

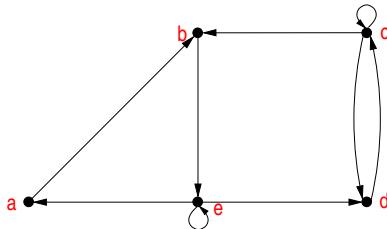
- (a)  $\overline{K_n}$
- (b)  $\overline{K_{m,n}}$
- (c)  $\overline{C_n}$
- (d)  $\overline{Q_n}$

12. Se o grafo simples  $G$  tem  $v$  vértices e  $e$  arestas, quantas arestas tem  $\overline{G}$ ?

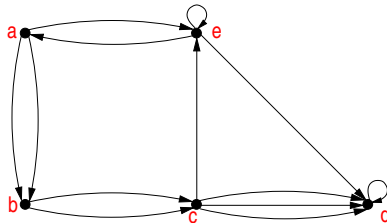
13. Mostre que se  $G$  é um grafo simples com  $n$  vértices, então  $G \cup \overline{G} = K_n$ .

14. O grafo reverso de um grafo dirigido  $G = (V, E)$ , representado por  $G^r$ , é o grafo dirigido  $(V, F)$  onde  $(u, v) \in F$ , se, e somente se,  $(v, u) \in E$ . Desenhe os grafos  $G^r$  correspondentes aos seguintes grafos:

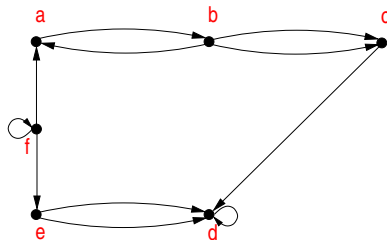
(a)



(b)



(c)



15. Seja  $G$  um grafo dirigido. Mostre que  $G = G^r$  se, e somente se, a relação associada com  $G$  é simétrica.

16. Represente a matriz de adjacência do grafo  $Q_3$ .

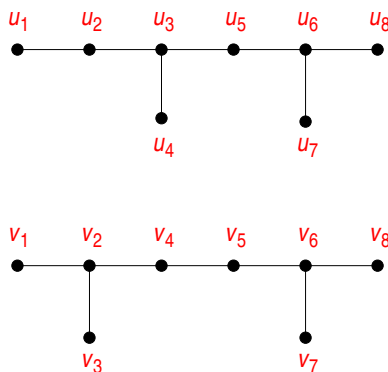
17. Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

18. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não dirigido? E de um grafo dirigido?

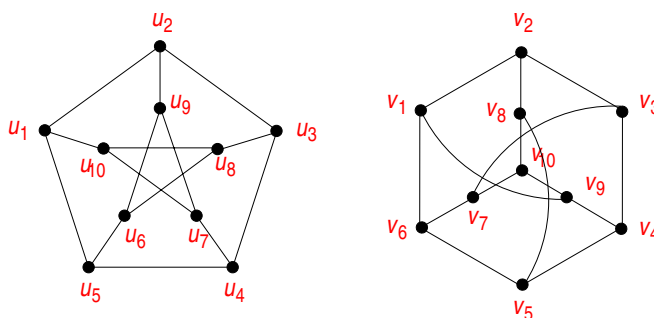
19. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de incidência de um grafo não dirigido?

20. Os pares de grafos abaixo são isomorfos?

(a)



(b)



21. Mostre que o isomorfismo de grafos simples é uma relação de equivalência.

22. Mostre que os vértices de um grafo bipartido com dois ou mais vértices podem ser ordenados de tal forma que a sua matriz de adjacência tem a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

onde as quatro entradas acima são blocos retangulares.

23. Um grafo simples  $G$  é dito ser auto-complementar se  $G$  e  $\bar{G}$  são isomorfos. Apresente um grafo simples auto-complementar com cinco vértices.

24. Para que inteiros  $n$  o grafo  $C_n$  é auto-complementar?

25. Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. Seja  $R$  uma relação em  $V$  formada por pares de vértices  $(u, v)$  tal que existe um trajeto (*path*) de  $u$  para  $v$  ou tal que  $u = v$ . Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência.

26. Apresente um grafo que tenha um circuito Euleriano e um circuito Hamiltoniano mas que não sejam idênticos.

27. Um grafo possui oito vértices e seis arestas? Esse grafo é conexo? Justifique a resposta.

28. Nos grafos abaixo, assuma que cada vértice possui um identificador único  $v_i, i \geq 1$ . Cada variável usada é um número inteiro positivo maior ou igual a 1 ou um outro valor específico, conforme o caso. Para cada letra, diga quantas soluções distintas podem ser obtidas.

(a) Árvores geradoras de um grafo  $C_n, n \geq 3$ .

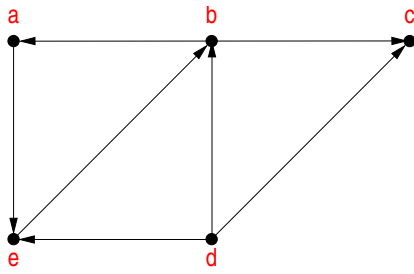
(b) Circuitos Hamiltonianos de um grafo  $K_n, n \geq 3$ , começando num vértice  $v_i, 1 \leq i \leq n$ .

(c) Circuitos Eulerianos de um grafo  $K_{m,m}, m \geq 2, m = 2a$  e começando num vértice  $v_i, 1 \leq i \leq 2m$ .

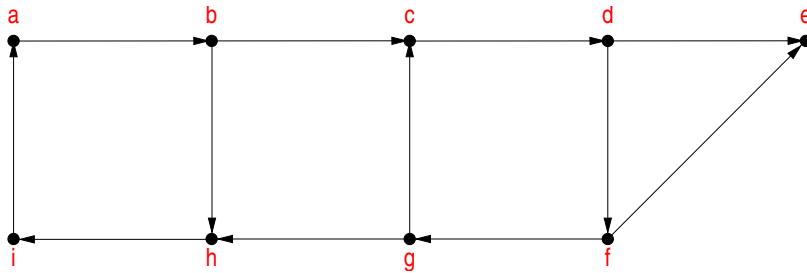
Grafo  $K_{m,m}, m \geq 2, m = 2a$  é o grafo bipartido completo sendo que  $m$  é um número par. Os grafos bipartidos completos que podemos ter são da forma  $K_{2,2}, K_{4,4}, K_{6,6}, \dots$ . Ou seja, cada vértice está conectado a exatamente  $m$  outros vértices. Como  $m$  é par, o grau de cada vértice é par e, assim, é possível haver circuitos Eulerianos.

29. Determine os componentes fortemente conexos de cada grafo dirigido abaixo.

(a)



(b)



30. Seja uma árvore com  $n$  vértices.

(a) Quantas arestas têm essa árvore?

(b) Prove esse resultado por indução matemática.