Área Conhecimento em Algoritmos e Teoria DCC/UFMG **Fundamentos de Teoria da Computação** **2021/2**

LISTA DE EXERCÍCIOS

Lista 0 - Parte 1

(Conceitos Fundamentais: Terminologia, Técnicas de Demonstração, Enumerabilidade)

Leitura necessária:

- *Introdução à Teoria da Computação, 2ª Edição* (Michael Sipser):
  - Capítulo 0.1: *Autômatos, Computabilidade e Complexidade*
  - Capítulo 0.2: *Noções e Terminologia Matemáticas*
  - Capítulo 0.3: *Definições, Teoremas e Demonstrações*
  - Capítulo 0.4: *Tipos de Demonstrações*
- *Material suplementar:*
  - Conjunto de slides: *Aula 0.1 - Terminologia, Técnicas de Demonstração, Enumerabilidade.*

Revisão.

1. Responda formalmente às seguintes perguntas:
   (a) O que é um *conjunto enumerável*?
   (b) Dê dois exemplos de conjuntos infinitos que sejam enumeráveis e dois exemplos de conjuntos infinitos que não sejam enumeráveis.

Exercícios.

2. (Sipser 0.7) Para cada item, dê uma relação que satisfaça as seguintes condições. (*Dica:* Você não precisa prover relações necessariamente sobre números; podem-se utilizar pessoas, objetos, animais, etc.)
   a) Reflexiva e simétrica, mas não transitiva.
   b) Reflexiva e transitiva, mas não simétrica.
   c) Simétrica e transitiva, mas não reflexiva.

3. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.

4. Use uma demonstração por contradição para mostrar que a soma de um número irracional e um número racional é irracional.

5. Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para $n \geq 1$. Use indução matemática.

6. Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n é um inteiro não-negativo. Use indução matemática.

7. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é enumerável ou não. Para aqueles enumeráveis, exiba uma enumeração mostrando os 10 primeiros elementos.
   (a) os inteiros maiores do que 10;

(b) os inteiros ímpares negativos;

(c) os números reais entre 0 e 2;

(d) os inteiros múltiplos de 10.

8. Dê um exemplo de dois conjuntos não-enumeráveis A e B tais que $A \cap B$ seja:

   (a) Finito.

   (b) Infinito enumerável.

   (c) Não-enumerável.

9. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.