Introdução - Os Números

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Os números: Introdução

- **Conjuntos** são uma estrutura fundamental da matemática.

  Em particular, **conjuntos numéricos** são de extrema importância.

- Aqui faremos uma breve cobertura de alguns conjuntos de números importantes:
  - os números naturais $\mathbb{N}$,
  - os números inteiros $\mathbb{Z}$,
  - os números racionais $\mathbb{Q}$,
  - os números irracionais $\mathbb{I}$, e
  - os números reais $\mathbb{R}$.

Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

  Alguns autores não consideram o número 0 (zero) como um número natural, definindo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

  Neste curso nós vamos considerar o 0 como um número natural.

- O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser definido através de duas "observações auto-evidentes":

  N_1: 0 (zero) é um número natural, e

  N_2: cada número natural tem um sucessor.

Os números naturais

- Reescrevendo estas "observações auto-evidentes" de maneira mais formal, obtemos os seguintes **axiomas** para os naturais:

  N_1': $0 \in \mathbb{N}$, e

  N_2': se $k \in \mathbb{N}$, então $s(k) \in \mathbb{N}$,

  onde $s(\cdot)$ é a **função sucessor**: $s(k) = k + 1$.

- Exemplos:
  1. $0 \in \mathbb{N}$, por causa de (N_1').
  2. $s(0) \in \mathbb{N}$, por causa de (N_2'). Notação: $s(0) = 1$.
  3. $s(s(s(s(s(0))))) = 5 \in \mathbb{N}$.

- Para obter-se o número natural n, aplica-se (N_2') n vezes.

Números naturais na representação decimal

- Números naturais podem ser decompostos em termos escritos em função de potências de 10.

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned} 723 &= 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ &= 700 + 20 + 3 \\ &= 723 \end{aligned}$$

◁

- Exemplo 2:

$$\begin{aligned} 8\,007 &= 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 8\,000 + 7 \\ &= 8\,007 \end{aligned}$$

◁

Números naturais na representação binária

- Não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor os números naturais.

  Podemos representar os números naturais em potências de 2, por exemplo.

- Exemplo 3:

$$\begin{aligned} 1010_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

◁

- Exemplo 4:

$$\begin{aligned} 110111_2 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 32 + 16 + 4 + 2 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

◁

Números naturais na representação binária

- Um método rápido para representar um número natural como binário:

Dígito binário	1	1	0	1	1	1	
Posição no número	5	4	3	2	1	0	
Equivalente decimal: 2$^{\textbf{posição}}$	32	16	8	4	2	1	
Contribuição de cada dígito	32	16	0	4	2	1	**55**

Os números inteiros

- O conjunto dos **números inteiros** é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

  O conjunto

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

  é o conjunto dos **números inteiros positivos**.

- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ pode ser definido como sendo o conjunto de todos os números naturais e seus negativos:

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad -x \in \mathbb{N}\}.$$

Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$.
- Exemplos:
  1. $\pi = 3.14159265359\ldots$
  2. $e = 2.71828182846\ldots$
  3. $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$
  4. $-\ln 2 = -0.6931471805\ldots$
  5. 2
  6. -4.5
- Um **número real** pode ser definido como uma soma infinita:

$$d_k \quad d_{k-1} \quad \cdots \quad d_1 \quad d_0 \quad . \quad d_{-1} \quad d_{-2} \quad d_{-3} \quad \cdots \quad = \sum_{i=-\infty}^{k} d_i \cdot 10^i$$

Os números reais

- Se um número real termina numa sequência infinita de 9s, substituem-se todos os 9s por 0 e incrementa-se o decimal antes do primeiro 9.

$$0.99999999\cdots \quad = \quad 1.00000000\cdots \quad = \quad 1.$$

Intuitivamente, esta regra faz sentido porque:

$$1 \quad = \quad 3 \cdot \frac{1}{3} \quad = \quad 3 \cdot 0.3333333\ldots \quad = \quad 0.9999999\ldots$$

Os números racionais

- O próximo conjunto de interesse é o dos **números racionais** $\mathbb{Q}$.
- Um número **racional** é um numero real x tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que

$$x \quad = \quad \frac{p}{q}.$$

- Exemplos:
  1. $\frac{1}{2}$
  2. $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
  3. $\frac{7\,327\,569\,219\,559}{6\,576\,576\,329\,756}$

Os números racionais

- Exemplo 5:
  - $10/3$ é racional?

    Sim. Quociente de inteiros.
  - 0.281 é racional?

    Sim. Número na notação decimal que representa $281/1000$.
  - Qualquer número representado numa calculadora tradicional é racional?

    Sim. O display da calculadora é finito e por essa razão todos os números representados são racionais.
  - $0.121212\ldots$ é racional?

    Sim. Seja $x = 0.121212\ldots$ e $100x = 12.121212\ldots$.

$$\begin{aligned} 100x - x &= 12.121212\ldots - 0.121212\ldots \\ 99x &= 12 \\ x &= 12/99 \end{aligned}$$

Os números racionais

- **Teorema.** Um número real x é racional se, e somente se, há periodicidade na sua representação decimal.

  Exemplos:

  1. $1/5 = 0.2\,0000\,0000\,0000\,\ldots$
  2. $1/7 = 0.142857\,142857\,142857\,\ldots$

Os números racionais

- Nós já vimos que um número racional é um numero real x tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que

$$x = \frac{p}{q}.$$

- Note que a condição para que dois números racionais sejam **equivalentes**, ou **iguais** é a seguinte:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \quad \text{se, e somente se,} \quad ps = qr.$$

- Podemos sempre escolher como representação de um racional a **representação simplificada**:

  uma fração em que o $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Os números irracionais

- O seguinte resultado mostra que nem todo número é racional, ou seja, que existem números **irracionais** (cujo conjunto é $\mathbb{I}$).

- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

  Prova.
  Por contradição. Suponha o contrário do que queremos provar, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional.

  Neste caso, sabemos que existem números $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

  Elevando os dois lados da equação acima ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$.

  Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Os números irracionais

- **Prova (Continuação).**

  Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

  Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $mdc(p, q) = 1$: <u>encontramos uma contradição.</u>

  <u>Conclusão:</u> não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$, portanto <u>$\sqrt{2}$ não é racional</u>.

  $\square$

Racionais *versus* irracionais

- Alguns fatos sobre racionais e irracionais:

  a) O conjunto dos números reais é a união dos racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

  b) Entre dois números racionais sempre existe um número irracional.

  c) Entre dois números irracionais sempre existe um número racional.

  d) A soma de dois números racionais é racional.

  e) A soma de um racional e um irracional é irracional.

  f) A soma de dois irracionais é complicada:
  não se sabe se $\pi + e \in \mathbb{Q}$ ou se $\pi + e \notin \mathbb{Q}$.

  g) *Spoiler alert!*

  O "tamanho" do conjunto dos números naturais e o dos racionais é o mesmo, mas o "tamanho" do conjunto dos reais é maior.

  (Vamos aprofundar nisto posteriormente neste curso...)