Lógica Proposicional

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Lógica: Introdução

- A **lógica** é o ramo da filosofia, matemática e ciência da comptuação que trata das **inferências válidas**.

  A lógica é a base do raciocínio matemático, e de todo o raciocínio automatizado.

- Ela estuda a **preservação da verdade** durante uma argumentação.

  A lógica concerne técnicas que garantem que:

  1. partindo de hipóteses verdadeiras,
  2. atinjamos sempre conclusões também verdadeiras.

- As regras da lógica dão significado preciso a afirmações matemáticas.

  Elas são essenciais na construção de **provas matemáticas**.

Lógica: Introdução

- Além de sua importância em matemática, a lógica tem aplicações em ciência da computação nas áreas de:

  1. desenho de circuitos,
  2. escrita de programas de computador,
  3. inteligência artificial,
  4. prova automática de teoremas,
  5. verificação da correção de programas,
  6. ...

- A lógica se divide em várias sub-áreas:
  - lógica proposicional,
  - lógica de predicados,
  - lógica de ordem superior.

- Nós vamos começar pelo estudo da **lógica proposicional**.

Lógica proposicional

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa (ou seja, uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.
- Exemplo 1: As seguintes sentenças declarativas são proposições:
  - *"Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais."* (Proposição verdadeira)
  - *"Londres é a capital da França."* (Proposição falsa)
  - "$1+1=2$." (Proposição verdadeira)
  - "$2+2=3$." (Proposição falsa)

  $\triangleleft$
- Exemplo 2: As seguintes sentenças não são proposições:
  - *"Que horas são?"* (Não é uma sentença declarativa.)
  - *"Estude com afinco para a prova."* (Não é uma sentença declarativa.)
  - "$x+2=3$." (Não é verdadeira nem falsa.)

  $\triangleleft$

Proposições

- Nós usamos letras para denotar **variáveis proposicionais**, ou seja, variáveis que representam proposições:

$$p, q, r, s, t, \ldots$$

- O **valor de verdade** de uma proposição pode ser:
  - **verdadeiro**, denotado por V (verdadeiro) ou T (*true*), ou
  - **falso**, denotado por F (falso ou *false*).
- A área da lógica que lida com proposições é chamada de **cálculo proposicional** ou **lógica proposicional**.

Proposições compostas

- **Proposições compostas** podem ser criadas ao se combinarem proposições já existentes.

  A combinação de proposições é feita usando **operadores lógicos** ou **conectivos lógicos** como:
  - negação (não),
  - conjunção (e),
  - disjunção (ou),
  - implicação (implica),
  - implicação dupla (implica duplamente).
- Nós vamos agora estudar estes conectivos.

Proposições: Negação

- Seja p uma proposição.

  A **negação de** p, denotada por $\neg p$ (ou também $\overline{p}$), é a afirmação

  "Não é o caso de que p."

  Lê-se a proposição $\neg p$ como *"não p"*.

  O valor de verdade de $\neg p$ é o oposto do valor de verdade de p.
- **Tabela da verdade** para a negação de uma proposição p:

Negação

p	**¬p**
T	F
F	T

Proposições: Negação

- Exemplo 3: Seja a proposição

  p: *"O computador do Mário roda Linux."*

  A negação $\neg p$ é: *"Não é o caso de que o computador do Mário rode Linux."*

  Forma alternativa de negação $\neg p$: *"O computador do Mário não roda Linux."* $\triangleleft$

- Exemplo 4: Seja a proposição

  q: *"Luciana tem pelo menos 25 anos."*

  A negação $\neg q$ é: *"Não é o caso de que Luciana tenha pelo menos 25 anos."*

  Forma alternativa de negação $\neg q$: *"Luciana não tem pelo menos 25 anos."*

  Mais uma forma de negação $\neg q$: *"Luciana tem menos de 25 anos."* $\triangleleft$

Conectivos lógicos: Conjunção

- Sejam p e q proposições.

  A **conjunção de** p **e** q, denotada por $p \wedge q$, é a afirmação

  "p e q".

  A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos p e q são verdadeiros, e é falsa em caso contrário.

- **Tabela da verdade** para a conjunção de duas proposições p e q:

Conjunção

p	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Conectivos lógicos: Conjunção

- Exemplo 5: Sejam as proposições:

  p : *"Hoje é sábado"*,

  q : *"Vou comer bolo"*.

  A conjunção $p \wedge q$ é:

  "Hoje é sábado e vou comer bolo." $\triangleleft$

- Às vezes em linguagem natural usamos "mas" para significar conjunção:

- Exemplo 6: A proposição

  "Hoje chove, mas vou sair"

  é a conjunção $p \wedge q$ das proposições

  p : *"Hoje chove"*

  q : *"Hoje vou sair"*. $\triangleleft$

Conectivos lógicos: Disjunção

- Sejam p e q proposições.

  A **disjunção de** p **e** q, denotada por $p \vee q$, é a afirmação

  "p ou q".

  A disjunção $p \vee q$ é verdadeira quando ao menos um entre p e q é verdadeiro, e é falsa em caso contrário.

- **Tabela da verdade** para a disjunção de duas proposições p e q:

Disjunção

p	**q**	$\mathbf{p \vee q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Disjunção

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$ Sejam as proposições:

$$p: \text{ “}\textit{O celular de Alice é azul}\text{”},$$
$$q: \text{ “}\textit{O celular de Alice é novo}\text{”}.$$

A disjunção $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou o celular de Alice é novo.”

Alternativamente, $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou é novo.”

◁

Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- A palavra “ou” tem dois significados diferentes em linguagem natural.
- O conectivo “ou” da disjunção corresponde ao significado de **ou inclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se ao menos uma das proposições é verdadeira.
- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ A disjunção

“Você pode se matricular nesta disciplina se tiver cursado Cálculo ou Programação”

significa que podem se matricular na disciplina:

- alunos que cursaram apenas Cálculo,
- alunos que cursaram apenas Programação,
- alunos que cursaram ambos Cálculo e Programação.

Esta é uma <u>disjunção inclusiva</u>.

◁

Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- O outro significado de “ou” corresponde ao **ou exclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se exatamente uma das proposições é verdadeira.
- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$ Se você ler no cardápio de um restaurante a proposição

“O prato feito inclui um pedaço de carne ou um pedaço de frango.”

você entende que você pode:

- escolher comer um pedaço de frango, mas não de carne,
- escolher comer um pedaço de carne, mas não de frango,
- mas você <u>não pode</u> escolher comer um pedaço de carne e um pedaço de frango ao mesmo tempo.

Esta é uma <u>disjunção exclusiva</u>.

◁

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- Sejam p e q proposições.

  O **ou exclusivo de** p **e** q, denotado por $p \oplus q$, é a afirmação

  “ou p ou q”.

  O ou exclusivo $p \oplus q$ é verdadeiro quando exatamente um entre p e q é verdadeiro, e é falso em caso contrário.

- **Tabela da verdade** para o ou exclusivo de duas proposições p e q:

Ou exclusivo

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- $\boxed{\text{Exemplo 10:}}$ Sejam as proposições

  p : *"Eu vou à festa hoje"*,

  q : *"Eu vou ficar em casa hoje"*.

  O ou exclusivo $p \oplus q$ é:

  "Hoje ou eu vou à festa, ou eu vou ficar em casa."

  ◁

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação condicional** ou **implicação** $p \to q$ é a afirmação

  "se p, então q".

  A afirmação condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

- Na afirmação condicional $p \to q$:

  - p é chamada de **hipótese**, **antecedente**, ou **premissa**,
  - q é chamada de **conclusão** ou **consequente**.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- **Tabela da verdade** para a proposição condicional envolvendo duas proposições p e q:

Implicação

p	**q**	$\mathbf{p \to q}$
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*T*
F	*F*	*T*

A afirmação condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- A implicação $p \to q$ pode ser entendida como uma promessa:

  "Se você me garantir p, eu te garanto q."

  A promessa só é quebrada quando você me garantir p e eu não te garantir q em troca.

  A promessa é mantida quando você me garante p e eu te garanto q, ou quando você não me garante p (e neste caso eu sou livre para te garantir q ou não sem quebrar a promessa).

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ Considere a implicação abaixo.

  "Se eu for eleito, eu vou abaixar os impostos"

  A proposição condicional é <u>falsa</u> se eu for eleito e não abaixar os impostos.

  Se eu não for eleito, eu posso abaixar os impostos ou não, sem assim quebrar minha promessa. Logo, se eu não for eleito, a proposição condicional é <u>verdadeira</u> independentemente de se eu abaixar os impostos ou não.

  ◁

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Na lógica proposicional, o valor de verdade da implicação $p \rightarrow q$ só depende do valor de verdade de p e q, e não de seu significado.

  Ao contrário do uso da implicação em linguagem natural, não existe necessariamente uma noção de "causa e efeito" entre p e q.

- A implicação lógica $p \rightarrow q$ apenas garante que:

  "q é no mínimo tão verdadeiro quanto p."

  A implicação só é falsa se "q for menos verdadeiro que p", ou seja, se p for verdadeiro e q for falso.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Exemplo 12: Vamos analisar se as implicações abaixo são verdadeiras ou falsas.
  - *"Se o sol emite luz, então queijos são laticínios."*

    Proposição verdadeira: premissa e conclusão verdadeiras.
  - *"Se $2 + 2 = 3$, então morangos são animais."*

    Proposição verdadeira: premissa falsa e conclusão falsa.
  - *"Se a semana tem 7 dias, então o Brasil fica na Europa."*

    Proposição falsa: premissa verdadeira e conclusão falsa.
  - *"Se π é racional, então o Atlântico é um oceano de Fanta Uva."*

    Proposição verdadeira: premissa e conclusão falsas.

$\triangleleft$

Proposições condicionais em linguagem natural

- Implicações aparecem na matemática e na linguagem natural em diversas formas.

  A afirmação condicional $p \rightarrow q$ pode ser expressa como:

  - *"se p, então q"*
  - *"se p, q"*
  - *"q se p"*
  - *"q quando p"*
  - *"p é suficiente para q"*
  - *"q é necessário para p"*
  - *"q a menos que $\neg p$"*
  - *"p implica q"*
  - *"p somente se q"*
  - *"q sempre que p"*
  - *"q segue de p"*

Proposições condicionais em linguagem natural

- Exemplo 13: Sejam as proposições:

$$p: \text{"Está fazendo sol."}$$
$$q: \text{"Eu vou ao clube."}$$

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser escrita em linguagem natural como:

- *"Se estiver fazendo sol, eu vou ao clube."*
- *"Estar fazendo sol é condição suficiente para eu ir ao clube."*
- *"Eu vou ao clube a menos que não esteja fazendo sol."*
- *"O fato de eu ir ao clube segue do fato de estar fazendo sol."*
- *"Eu vou ao clube sempre que faz sol."*
- *"Faz sol somente se eu vou ao clube."*

$\triangleleft$

Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- Dada uma implicação $p \to q$:
  - sua **conversa** é a implicação $q \to p$,
  - sua **contrapositiva** é a implicação $\neg q \to \neg p$,
  - sua **inversa** é a implicação $\neg p \to \neg q$.

Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- Exemplo 14: Seja a proposição

  "O time da casa vence sempre que está chovendo."

  Esta implicação pode ser escrita como $p \to q$, onde

  p é a proposição *"Está chovendo"*, e

  q é a proposição *"O time da casa vence"*.

  - A conversa $q \to p$ é a proposição

    "Se o time da casa vence, está chovendo."
  - A contrapositiva $\neg q \to \neg p$ é a proposição

    "Se o time da casa não vence, então não está chovendo."
  - A inversa $\neg p \to \neg q$ é a proposição

    "Se não está chovendo, o time da casa não vence."

◁

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação bicondicional** ou **implicação dupla** $p \leftrightarrow q$ é a afirmação

  "p se, e somente se, q".

  A afirmação bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor de verdade, e é falsa em caso contrário.

- Em linguagem natural é comum expressar $p \leftrightarrow q$ como:
  - *"p é necessário e suficiente para q."*
  - *"p sse q."* Note que usamos "sse" com dois "s".

    (Em inglês, usa-se o "iff" com dois "f".)

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- **Tabela da verdade** para o ou exclusivo de duas proposições p e q:

Implicação dupla

p	**q**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*T*

- A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que ambos $p \to q$ e $q \to p$ são verdadeiros, e ela é falsa em caso contrário.

Tabela da verdade de proposições compostas

- Nós introduzimos a negação e os conectivos lógicos de disjunção, conjunção, ou exclusivo, implicação e implicação dupla.
- Nós podemos usar estes operadores para expressar proposições cada vez mais complexas.
- Para determinar o valor de verdade de proposições compostas, podemos usar **tabelas da verdade**.

Exemplo 15: Tabela da verdade para a expressão $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\neg \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	$(\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

◁

Ordem de precedência dos operadores lógicos

- Em uma expressão composta, a ordem de aplicação dos operadores é:

  1) negação: $\neg$
  2) conjunção: $\wedge$
  3) disjunção: $\vee$
  4) implicação: $\rightarrow$
  5) implicação dupla $\leftrightarrow$

- Exemplos:

  1. $p \vee \neg q \wedge r$ equivale a $p \vee ((\neg q) \wedge r)$.
  2. $p \rightarrow q \vee r$ equivale a $p \rightarrow (q \vee r)$.

Operadores lógicos bit-a-bit

- Computadores representam informação usando **bits**, que são dígitos binários 0 ou 1.

  O bit 1 representa T (verdadeiro), e o bit 0 representa F (falso).

- Conectivos lógicos podem ser utilizados para operar sobre **variáveis Booleanas**, cujos valores são bits.

  A conjunção é chamada de **AND**, a disjunção é chamada de **OR**, e o ou exclusivo é chamado de **XOR** (*exclusive or*).

  Tabela da verdade para os operadores AND, OR e XOR.

x	**y**	**x AND y**	**x OR y**	**x XOR y**
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Operadores lógicos bit-a-bit

- Uma **string de bits** é uma sequência de zero ou mais bits.

  O comprimento de uma string é o número de bits nesta string.

- Exemplos:

  1. 101 é uma string de bits de comprimento 3.
  2. 0100111 é uma string de bits de comprimento 7,

- Operadores binários podem ser aplicados **bit a bit** em duas strings de bits de mesmo comprimento. O resultado é uma string de mesmo comprimento.

- Exemplo 16:

	0110
	1101
resultado de *AND* bit a bit:	0100
resultado de *OR* bit a bit:	1111
resultado de *XOR* bit a bit:	1011

◁

Aplicações da lógica proposicional

Aplicações da lógica proposicional: Introdução

- A lógica tem importantes aplicações na matemática, ciência da computação, e diversas outras disciplinas:
  1. tradução de sentenças em linguagem natural, frequentemente ambíguas, para uma linguagem precisa,
  2. especificação de circuitos lógicos,
  3. solução de quebra-cabeças (o que é essencial para inteligência artificial),
  4. automatização do processo de construção de provas matemáticas,
  5. ...
- Nesta seção vamos exemplificar algumas destas aplicações práticas da lógica proposicional.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Sentenças em linguagem natural são frequentemente ambíguas, o que pode causar problemas de comunicação.
- Traduzir sentenças em linguagem natural para proposições compostas remove a ambiguidade.
- Uma vez traduzidas para proposições lógicas, estas sentenças podem ser analisadas quanto ao seu valor de verdade.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Exemplo 17: Seja a sentença em linguagem natural:

  "Você não pode andar na montanha russa se você for mais baixo que 1.50m de altura, a menos que você tenha mais de 16 anos."

  Podemos traduzí-la para uma proposição composta, usamos as seguintes proposições:

  - p : *"você pode andar na montanha russa"*,
  - q : *"você é mais baixo que 1.50 m"*,
  - r : *"você tem mais de 16 anos"*.

  A sentença em linguagem natural é, então, traduzida para:

$$(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p.$$

◁

Especificação de sistemas

- Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

$\boxed{\text{Exemplo 18:}}$ Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

Solução. Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

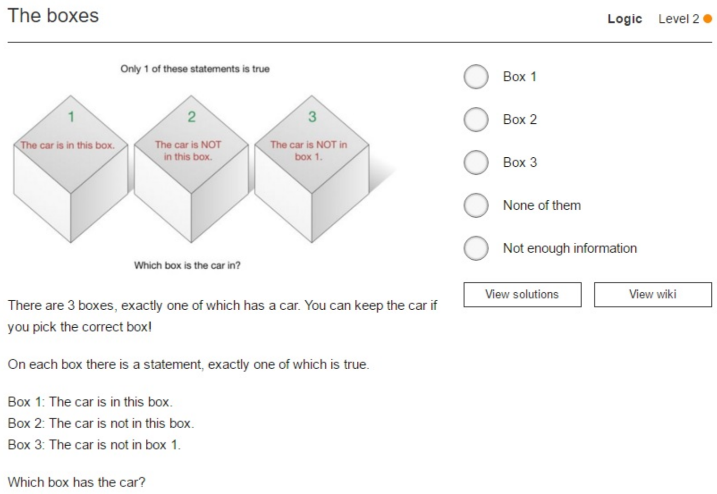
- r : *"a reposta automática pode ser enviada"*,
- c : *"o sistema de arquivos está cheio"*.

A especificação fica, então, traduzida para:

$$c \to \neg r.$$

Resolução de problemas e quebra-cabeças

- $\boxed{\text{Exemplo 19:}}$ Desafio retirado de `www.brilliant.org`:



Equivalência de proposições

Equivalência de proposições: Introdução

- Um passo importante na resolução de muitos problemas é a substituição de uma afirmação por outra com mesmo valor de verdade.
- Nesta seção vamos estudar como determinar se duas proposições compostas têm sempre o mesmo valor de verdade.

Equivalência de proposições: Introdução

- Primeiro, vamos categorizar os tipos de expressões compostas:
  - uma **tautologia** é uma expressão sempre verdadeira independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contradição** é uma expressão sempre falsa independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contingência** é uma expressão que não é nem uma tautologia, nem uma contradição.
- $\boxed{\text{Exemplo 20:}}$ A tabela da verdade abaixo mostra que $(p \wedge \neg p)$ é uma contradição, enquanto a expressão $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

$\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p}$
T	F	F	T
F	T	F	T

$\triangleleft$

Equivalências lógicas

- Duas proposições compostas p e q são **logicamente equivalentes** se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

  A notação $p \equiv q$ denota que p e q são logicamente equivalentes.
- Uma maneira de determinar se $p \equiv q$ é usando tabelas da verdade.
- $\boxed{\text{Exemplo 21:}}$ Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  Tabela da verdade para $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\neg\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

  Como a coluna correspondente a $p \rightarrow q$ e a coluna correspondente a $\neg p \vee q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

  Logo $p \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q)$.

$\triangleleft$

Equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 22:}}$ Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução. Tabela da verdade para $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$	$\neg\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{q}$	$\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

  Uma vez que a coluna correspondente a $\neg(p \vee q)$ e a coluna correspondente a $\neg p \wedge \neg q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é uma tautologia.

  Logo, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. $\triangleleft$

  A equivalência que demonstramos é uma das **Leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan

$\neg(p \vee q)$	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q)$	$\equiv$	$\neg p \vee \neg q$

Equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 23:}}$ Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

  Solução. Tabela da verdade para $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$	$\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$	$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

  Como as colunas correspondentes a $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. $\triangleleft$

  A equivalência que demonstramos é a **lei da distributividade da disjunção sobre a conjunção**.

Equivalências lógicas

- Algumas equivalências lógicas importantes:

Nome	Equivalência
Leis de identidade	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
Leis de dominância	$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$
Leis de idempotência	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
Lei da dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Leis de comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Leis de associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Leis de distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Leis de absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Leis da negação	$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$

Equivalências lógicas

- Equivalências lógicas envolvendo proposições condicionais:

Equivalências
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

- Equivalências lógicas envolvendo proposições bicondicionais:

Equivalências
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Usos das Leis de De Morgan

- As duas equivalências lógicas conhecidas como Leis de De Morgan são particularmente importantes.
- A lei

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

- Exemplo 24: Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Júlia vai ao cinema ou Catarina vai ao cinema."

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \vee q$, onde p é *"Júlia vai ao cinema"* e q é *"Catarina vai ao cinema"*.

Pela lei de De Morgan, a negação é $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, que se traduz em

"Júlia não vai ao cinema e Catarina não vai ao cinema."

◁

Usos das Leis de De Morgan

- A lei de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

diz que a negação da conjunção é a disjunção das negações.

- Exemplo 25: Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Pedro comeu lasanha e bolo."

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \wedge q$, onde p é *"Pedro comeu lasanha"* e q é *"Pedro comeu bolo"*.

Pelas Leis de De Morgan, a negação é $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, que se traduz em

"Pedro não comeu lasanha ou ele não comeu bolo."

◁

Construindo novas equivalências lógicas

- Como vimos, tabelas da verdade podem ser utilizadas para verificar equivalências lógicas.
- No geral, para expressões envolvendo n variáveis lógicas são necessárias 2^n linhas na tabela.

  Para n grande, pode ser inconveniente construir a tabela da verdade.
- Uma alternativa é utilizar equivalências lógicas já conhecidas para derivar novas equivalências lógicas diretamente.

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 26: Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv p \wedge \neg q && \text{(pela lei da dupla negação)}
\end{aligned}
$$

$\lhd$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 27: Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)} \\
&\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F\text{)} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F && \text{(pela lei da comutatividade)} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{(pela lei de identidade)}
\end{aligned}
$$

$\lhd$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 28: Mostre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia.

Solução.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{(equivalência de condicionais)} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{(pela Leis de De Morgan)} \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{(comutatividade e associatividade)} \\
&\equiv T \vee T && \text{(pela lei de negação)} \\
&\equiv T && \text{(pela lei de dominância)}
\end{aligned}
$$

$\lhd$